| PRÜFUNG DER FACHHOCHSCHULREIFE<br>an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u.a. | Hauptprüfung<br>2 0 0 5 |
|---|---|
| **Fach : M a t h e m a t i k** | **Aufgabe 4 (Seite 1/2)** |

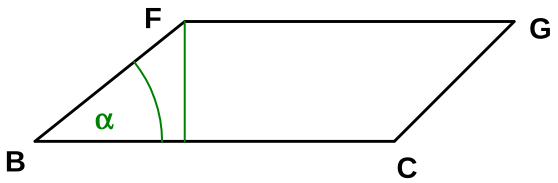
**L Ö S U N G S V O R S C H L A G** **Punkte**

4.1 $\overrightarrow{AE}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{OF}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AE} \Rightarrow \underline{\underline{F(4|4|3)}}\ ;\ \overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{AE} \Rightarrow \underline{\underline{H(-1|3|6)}}$ **3**

4.2 $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix};\ \Rightarrow \begin{matrix}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}\end{matrix}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=4\cdot(-1)+3\cdot 2+(-1)\cdot 2=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC} \Rightarrow$ *ABCD* ist ein Rechteck **4**

4.3




Seitenfläche *BCGF*:

$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BF}=\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}$

$$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BF}}{|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BF}|}=\frac{\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix}}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}\Rightarrow \underline{\underline{\alpha\approx 48{,}19^\circ}}$$

Fläche des Parallelogramms *BCGF*:

$A_P=|\overrightarrow{BC}|\cdot|\overrightarrow{BF}|\cdot\sin\alpha=3\cdot 4\cdot\sin 48{,}19^\circ\approx\underline{\underline{8{,}94\text{ FE}}}$ **4**

Grundfläche *ABCD*:

$A_R=|\overrightarrow{AD}|\cdot|\overrightarrow{AB}|=3\cdot\sqrt{26}\approx\underline{\underline{15{,}3\text{ FE}}} \Rightarrow \underline{\underline{A_P<A_R}}$ **2**

4.4 Gerade durch *A* und *G*: $(AG):\vec{x}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AG}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}$

Gerade durch *C* und *E*: $(EC):\vec{x}=\overrightarrow{OE}+t\cdot\overrightarrow{EC}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-3\end{pmatrix}$

$$(AG)\cap(EC)\Rightarrow \left.\begin{matrix}3r-3t=0\\5r-5t=0\\5r+3t=4\end{matrix}\right\}\begin{matrix}r=\frac{1}{2}\\ t=\frac{1}{2}\end{matrix}$$

$\overrightarrow{OS}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1{,}5\\3{,}5\\2{,}5\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{S(1{,}5|3{,}5|2{,}5)}}$ **4**

**L Ö S U N G S V O R S C H L A G** **Punkte**

4.4 Fortsetzung

Spitzer Schnittwinkel: $\cos\varphi = \left|\dfrac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{EC}}{\left|\overrightarrow{AG}\right|\cdot\left|\overrightarrow{EC}\right|}\right| = \left|\dfrac{\begin{pmatrix}3\\5\\5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-3\end{pmatrix}}{\sqrt{59}\cdot\sqrt{43}}\right| = \left|\dfrac{19}{\sqrt{2537}}\right| \approx 0{,}3772$ **2**

$\underline{\underline{\varphi \approx 67{,}84^\circ}}$

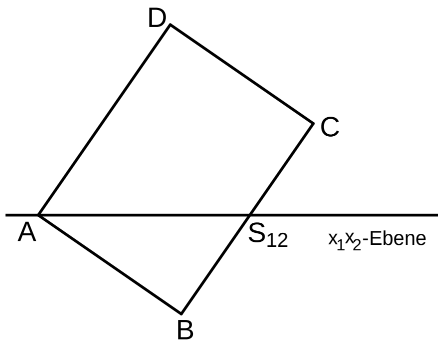
4.5 $(BC): \vec{x} = \overrightarrow{OB} + r\cdot\overrightarrow{BC}$; $\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$

$x_1x_2-$Ebene: $x_3 = 0 \;\Rightarrow\; -1+2r = 0 \;\Rightarrow\; r = \dfrac{1}{2}$

$\vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\-1\end{pmatrix} + \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3{,}5\\5\\0\end{pmatrix}$; $\underline{\underline{S_{12}(3{,}5|5|0)}}$ **3**

Die Grundfläche *ABCD* wird durch die $x_1x_2-$Ebene in ein Trapez und ein Dreieck zerteilt, weil der Punkt *A* in der $x_1x_2-$Ebene, der Punkt B unterhalb und die Punkte *C* und *D* oberhalb der Koordinatenebene liegen.

<u>Skizze:</u>




Nach 4.5 halbiert wegen $r = \frac{1}{2}$ der Punkt $S_{12}$ die Kante *BC*. Das Verhältnis der Grundseiten ist somit $\underline{\underline{2:1}}$. **4**

4.6 Der Punkt *P* liegt im Innern, wenn gilt $0 < r,s,t < 1$.

Für $P(1{,}5|3{,}5|1{,}5)$ gilt

$\overrightarrow{AP} = r\cdot\overrightarrow{AB} + s\cdot\overrightarrow{AD} + t\cdot\overrightarrow{AE}$

$$\begin{pmatrix}1{,}5\\2{,}5\\1{,}5\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}4\\3\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r}4r-s=1{,}5\\3r+2s=2{,}5\\-r+2s+4t=1{,}5\end{array}\right\} \begin{array}{l}r=\frac{1}{2}\\s=\frac{1}{2}\\t=\frac{1}{4}\end{array}\left\} \begin{array}{l}0<r<1\\0<s<1\\0<t<1\end{array}\right\}$$

<u>Somit muss P innerhalb des Prismas liegen.</u>

**4**

**30**