| PRÜFUNG DER FACHHOCHSCHULREIFE<br>an Berufskollegs zum Erwerb der Fachhochschulreife u.a. | Hauptprüfung<br>2 0 0 5 |
|---|---|
| **Fach : M a t h e m a t i k** | **Aufgabe 5 (Seite 1/2)** |

**L Ö S U N G S V O R S C H L A G** **Punkte**

5.1 Es gilt:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 10 \\ 4 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 4 & 5 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & 6 & 10 \\ 0 & -18 & -22 & -35 \\ 0 & 18 & 22 & 35 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 18 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & -18 & -22 & -35 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Damit ergibt sich für den allgemeinen Lösungsvektor

$$\vec{x} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 5 \\ 35 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{t}{18}\begin{pmatrix} 2 \\ -22 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für $t = \frac{13}{2}$ ist $x_1 = 1,\ x_2 = -6$ und $x_3 = \frac{13}{2}$.
Alternativ kann man auch $x_1 = 1$ in das ursprüngliche Gleichungssystem einsetzen und erhält dann mit Hilfe des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 5x_2 + 6x_3 &= 9 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 3x_2 + 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

ebenfalls die Lösung $x_1 = 1,\ x_2 = -6$ und $x_3 = \frac{13}{2}$. **6**

5.2 Die Matrix $\boldsymbol{N}$ muss quadratisch sein, da $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{N}$ dasselbe Format haben und $(\boldsymbol{X} - \boldsymbol{N})^2$ in der Gleichung vorkommt.

Es gilt:

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N})(\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N}) &= (\boldsymbol{X}-\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X} && \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{XN} - \boldsymbol{NX} + \boldsymbol{N}^2 &= \boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{NX} + \boldsymbol{X} && \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{N}^2 - \boldsymbol{XN} &= \boldsymbol{X} && \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{N}^2 &= \boldsymbol{XN} + \boldsymbol{X} && \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{N}^2 &= \boldsymbol{X}(\boldsymbol{N} + \boldsymbol{E}) && \Leftrightarrow \\ \boldsymbol{N}^2(\boldsymbol{N}+\boldsymbol{E})^{-1} &= \boldsymbol{X} \end{aligned}$$

**6**

5.3.1 Es gilt $\vec{x} = (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A})^{-1}\vec{y}$ und damit

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}16 \\ -0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}76 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 240 \\ 310 \\ 150 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 650 \\ 800 \\ 750 \end{pmatrix}.$$

**L Ö S U N G S V O R S C H L A G** **Punkte**

Somit erhält man als Input-Output-Tabelle:

| | $Z_1$ | $Z_2$ | $Z_3$ | $\vec{y}$ | $\vec{x}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $Z_1$ | 130 | 160 | 120 | 240 | 650 |
| $Z_2$ | 260 | 80 | 150 | 310 | 800 |
| $Z_3$ | 260 | 160 | 180 | 150 | 750 |

(Alle Angaben in ME) **8**

5.3.2 Aus $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\vec{x}=\vec{y}$ erhält man mit

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}450\\1200\\x\end{pmatrix} \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\150\end{pmatrix} \text{ das Gleichungssystem}$$

$$\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}16\\-0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2\\-0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}76\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}450\\1200\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\150\end{pmatrix}. \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}0{,}8\cdot 450-0{,}2\cdot 1200-0{,}16x&=y_1\\-0{,}4\cdot 450+0{,}9\cdot 1200-0{,}2\cdot x&=y_2\\-0{,}4\cdot 450-0{,}2\cdot 1200+0{,}76x&=150\end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $x=750$. Damit ergibt sich $y_2=750$ und $y_1=0$. Somit ist

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}450\\1200\\750\end{pmatrix} \text{ und } \vec{y}=\begin{pmatrix}0\\750\\150\end{pmatrix}.$$ **6**

5.3.3 Es gilt: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0{,}8 & -0{,}2 & -0{,}16\\-0{,}4 & 0{,}9 & -0{,}2\\-0{,}4 & -0{,}2 & 0{,}76\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}0\\100\\100\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\\frac{4800}{23}\\\frac{5500}{23}\end{pmatrix}.$

Also können $Z_2$ und $Z_3$ unter den Bedingungen $x_1=100$ und $y_1=0$ den Markt wie gewünscht beliefern. **4**

**30**