Punkte

2.1 Das Schaubild einer Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.
Weiterhin liegt der Punkt $A(1|\frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion. 5

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$; $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f.

2.2 Bestimmen Sie die Koordinaten des Hoch- und des Tiefpunktes von K_f.
Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. 8

2.3 Berechnen Sie $\int_{-3}^{1} f(x)\,dx$ und interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch. 5

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -x^2 - 3$ und $h(x) = e^{2x}$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Schaubilder heißen K_g und K_h.

2.4 Skizzieren Sie die Schaubilder K_g und K_h. 3

2.5 K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet.
Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. 2

2.6 Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -7$ begrenzen eine Fläche. In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0|-7)$ und $P(u|g(u))$ mit $0 \le u \le 2$ einbeschrieben werden.
Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 1$.
Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt dieses Dreiecks für $u = \sqrt{\frac{4}{3}}$ maximal wird. 7

30

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

2.1 1. Möglichkeit: Produktansatz $f(x) = a \cdot x(x+3)^2$

wegen doppelter Nullstelle bei $x = -3$ und einfacher Nullstelle bei $x = 0$

Punktprobe mit $A(1\,|\,\frac{16}{3})$: $a \cdot 1 \cdot 4^2 = \frac{16}{3} \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$

2. Möglichkeit: Allgemeiner Ansatz $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

Punkt $O(0\,|\,0)$: $f(0) = 0$ $\quad d = 0$

Punkt $A(1\,|\,\frac{16}{3})$: $f(1) = \frac{16}{3}$ $\quad a + b + c + d = \frac{16}{3}$ $\quad a + b + c = \frac{16}{3}$

Punkt $N(-3\,|\,0)$: $f(-3) = 0$ $\quad -27a + 9b - 3c + d = 0$ $\quad -27a + 9b - 3c = 0$

Berührung: $f'(-3) = 0$ $\quad 27a - 6b + c = 0$ $\quad 27a - 6b + c = 0$

Matrixschreibweise:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ -27 & 9 & -3 & 0 \\ 27 & -6 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 36 & 24 & 144 \\ 0 & -33 & -26 & -144 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & -33 & -26 & -144 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & \frac{16}{3} \\ 0 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow c = 3;\ b = 2;\ a = \frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$ 5

2.2 $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$

$f'(x) = -x^2 - 4x - 3$

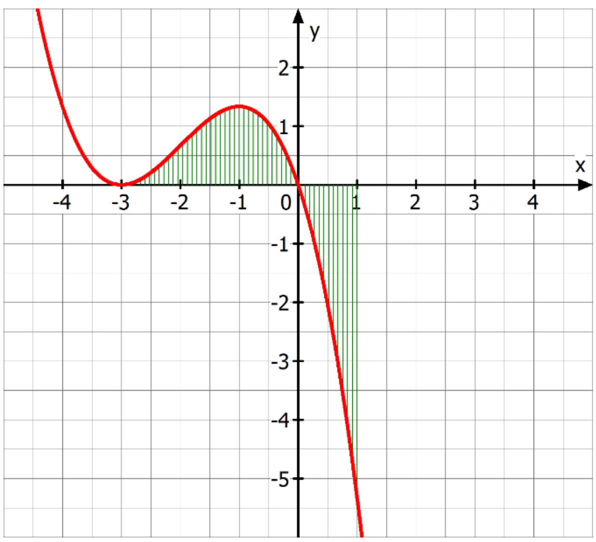
$f''(x) = -2x - 4$

Extrempunkte: $f'(x) = 0$

$-x^2 - 4x - 3 = 0$

$x_1 = -3,\ f''(-3) = 2 > 0,\quad T(-3\,|\,0)$

$x_2 = -1,\ f''(-1) = -2 < 0,\quad H(-1\,|\,\frac{4}{3})$ 8



2.3 $\int_{-3}^{1} f(x)dx = \int_{-3}^{1} (-\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x)dx$

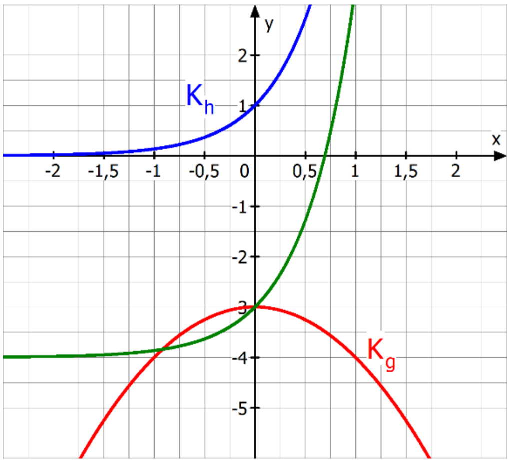
$= \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2\right]_{-3}^{1}$

$= -\frac{1}{12} - \frac{2}{3} - \frac{3}{2} - (-\frac{27}{4} + 18 - \frac{27}{2}) = 0$

Die Flächenstücke oberhalb und unterhalb der x-Achse sind gleich groß und heben sich im Integral somit auf. 5

Punkte

2.4 Schaubilder siehe rechts 3



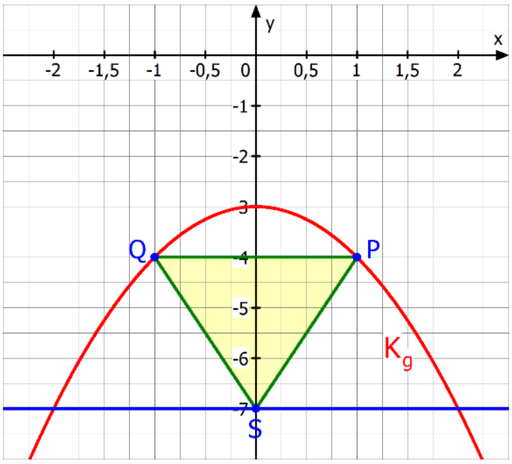
2.5 $h(x)=e^{2x}$; $g(x)=-x^2-3$

Die neue Funktion muss an der Stelle $x=0$ den selben Funktionswert haben wie g, d. h. $h(0)+d=g(0)$.

$$e^{2\cdot 0}+d=-0^2-3$$
$$1+d=-3$$
$$d=-4$$

Neuer Funktionsterm: $e^{2x}-4$ 2

2.6 Zielgröße: $A_\Delta=\frac{1}{2}a\cdot h_a$



Nebenbedingungen: $a=2u$

$h_a=f(u)+7$

Zielfunktion: $A(u)=\frac{1}{2}a\cdot h_a=u\cdot(f(u)+7)$

$=u\cdot(-u^2+4)=-u^3+4u$

Extremwert: $A'(u)=-3u^2+4=0$

$\Rightarrow\ u=\sqrt{\frac{4}{3}}$, da $u>0$

Randwerte: $A(0)=A(2)=0$

Für $u=\sqrt{\frac{4}{3}}$ wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. 7

30