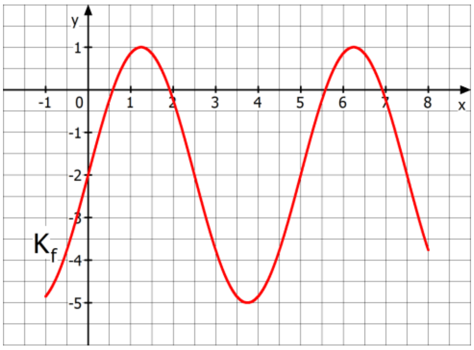
Punkte

3.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = a \cdot \sin(k \cdot x) + b$ für $x \in [-1; 8]$.
Ihr Schaubild K_f ist im folgenden Koordinatensystem dargestellt.
Ermitteln Sie passende Werte für a, k und b anhand der Abbildung. 4



3.2 Zusätzlich ist die Funktion g mit $g(x) = -3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$ für $x \in [0; 4\pi]$
gegeben. Ihr Schaubild sei K_g.

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte und der Wendepunkte von K_g an. 4

3.3 Bestimmen Sie für die nachfolgenden Problemstellungen jeweils einen passenden Funktionsterm:

3.3.1 Der Temperaturverlauf an einem Sommertag soll durch eine trigonometrische Funktion beschrieben werden.
Um 14 Uhr erreicht die Temperatur den höchsten Wert von 28 °C.
Die tiefste Temperatur des Tages betrug 8 °C um 2 Uhr. 3

3.3.2 Eine Saunakabine kühlt exponentiell ausgehend von einer Temperatur von 60 °C ab. Nach 10 Minuten hat die Kabine noch eine Temperatur von 40 °C. Die Umgebungstemperatur beträgt 4 °C. 5

Nachfolgend ist die Funktion h gegeben durch $h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2$ für $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild sei K_h.

3.4 Weisen Sie nach, dass K_h keine Extrempunkte und keine Wendepunkte hat, und geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_h an. 4

3.5 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_h im Punkt $P(-2 \mid h(-2))$. 3

3.6 K_h und die Koordinatenachsen schließen eine Fläche ein.
Berechnen Sie deren Inhalt. 7

30

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

3.1 abgelesen: Periodenlänge 5 mit $p = \frac{2\pi}{k} \Rightarrow \quad k = \frac{2\pi}{5} = \frac{2}{5}\pi$

$y_{HP} = 1$ und $y_{TP} = -5 \quad \Rightarrow a = \frac{y_{HP} - y_{TP}}{2} = \frac{1-(-5)}{2} = 3$

$\Rightarrow b = \frac{y_{HP} + y_{TP}}{2} = \frac{1+(-5)}{2} = -2$ 4

3.2 $g(x) = -3 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) + 2$

Amplitude: 3 Verschiebung in Richtung der y-Achse: um 2 nach oben

Periode: $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{0{,}5} = 4\pi$

Das Schaubild eines negativen Kosinus weist auf der y-Achse einem TP auf:
$T_1(0|-1)$ und damit auch $T_2(4\pi|-1)$ 1

Nach der halben Periode muss ein Hochpunkt liegen: $H(2\pi|5)$ 1

Die Wendepunkte finden sich auf Höhe der Verschiebung in Richtung der y-Achse und liegen beim Kosinus nach einem Viertel und nach drei Viertel der Periodenlänge: $W_1(\pi|2)$ $W_2(3\pi|2)$ 2

3.3.1 Trigonometrische Funktion ; z. B. x = 0 bei 14 Uhr ; Amplitude: $\frac{28-8}{2} = 10$

Verschiebung y-Achse: $\frac{28+8}{2} = 18$; Periodenlänge 24 h also: $b = \frac{2\pi}{24} = \frac{1}{12}\pi$

<u>Damit:</u> z. B.: $f(x) = 10 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 18$ 3

3.3.2 Exponentialfunktion mit Ansatz: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot t} + b$

Umgebungstemperatur = 4 °C ; Asymptote: $y = 4 = b$

$f(0) = a \cdot e^{k \cdot 0} + b = 60$ mit $b = 4$ folgt daraus: $a = 56$

bzw. Vorfaktor a = Maximaltemperatur - Umgebungstemperatur $= 60 - 4 = 56$

Vorfaktor k im Exponent: $56 \cdot e^{k \cdot 10} + 4 = 40 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{10}\ln\left(\frac{9}{14}\right) \approx -0{,}044$

<u>Damit:</u> z. B.: $f(x) = 56 \cdot e^{-0{,}044 \cdot x} + 4$ 5

3.4 $h(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2}x} - 2$

$h'(x) = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \Rightarrow$ keine Extrema

2

$h''(x) = \frac{1}{8}e^{-\frac{1}{2}x} \neq 0 \Rightarrow$ keine Wendepunkte

<u>Asymptote</u>: Existiert nur für $x \to \infty$ und lautet: $y = -2$ 2

Punkte

L Ö S U N G S V O R S C H L A G

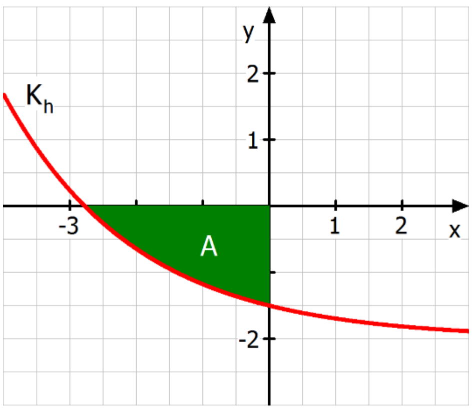
3.5 $P\left(-2 \,\middle|\, h(-2)\right)$: $h(-2)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}-2=\frac{1}{2}e-2$

Tangentensteigung: $h'(-2)=-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2)}=-\frac{1}{4}e$

Achsenabschnitt: $P\left(-2 \,\middle|\, \frac{1}{2}e-2\right)$: $\frac{1}{2}e-2=-\frac{1}{4}e\cdot(-2)+b \quad \Rightarrow b=-2$

Tangente im Punkt P: $t(x)=-\frac{1}{4}e\cdot x-2$ 3

3.6 Skizze der zu berechnenden Fläche (nicht verlangt):



Nullstelle von h: $h(x)=\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2\cdot\ln(4)\approx-2{,}77$ 2

$$\int_{-2\ln(4)}^{0}\left(\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-2\right)dx=\left[-e^{-\frac{1}{2}x}-2x\right]_{-2\ln(4)}^{0}$$

$$=-e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}-2\cdot 0-\left(-e^{-\frac{1}{2}\cdot(-2\ln(4))}-2\cdot(-2\ln(4))\right)$$

$$=-1+4-4\ln(4)=3-4\ln(4)$$

da A unterhalb der x-Achse liegt gilt: $A=4\ln(4)-3\approx 2{,}55$

(Das bestimmte Integral kann auch mit der Dezimalzahl als Untergrenze ermittelt werden). 5

30