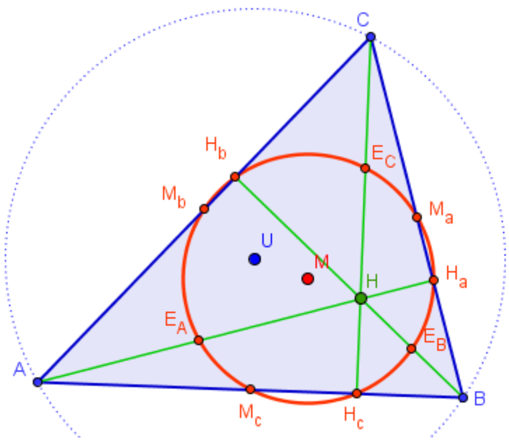
Nur wenige Schüler lernen in Ihrer Schullaufbahn die „Perle“ der geometrischen Zusammenhänge beim Dreieck kennen:

den ***Feuerbachschen Kreis***
(nach Karl Feuerbach 1800-1834)

Eventuell war der Kreis bereits Leonhard Euler (1707–1783) bekannt. Er wird daher gelegentlich in der Literatur auch als ***Euler-Kreis*** bezeichnet.



Eigenschaften:

Der Feuerbachsche Kreis trifft gleich 9 besondere Punkte des Dreiecks, außerdem liegt sein Mittelpunkt auf der Euler-Geraden exakt in der Mitte zwischen Höhenschnittpunkt H und Umkreismittelpunkt U. Doch damit noch nicht genug. Wir werden zeigen, dass er durch zentrische Streckung mit dem Faktor 0,5 am Höhenschnittpunkt als Streckzentrum aus dem Umkreis hervor geht und sein Mittelpunkt somit genau zwischen U und H liegt.

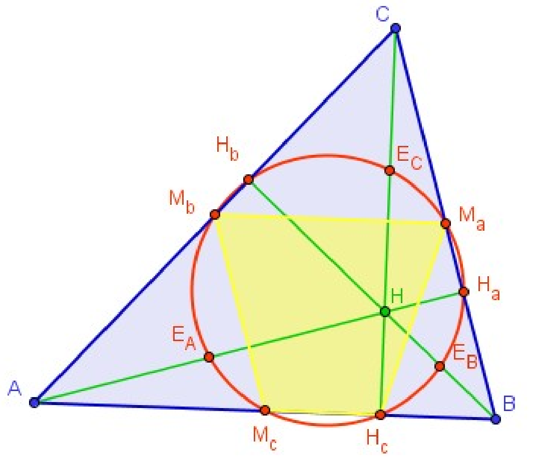
Die 9 besonderen Punkte auf dem Feuerbachschen Kreis:

- Offensichtlich sind die 3 Seitenmitten des Dreiecks.
- Auch die 3 Höhenfußpunkte gehören dazu.
- Etwas versteckt sind die Mitten der 3 oberen Höhenabschnitte $\overline{HA}, \overline{HB}$ und $\overline{HC}$. Diese Punkte nennt man übrigens auch ***Euler-Punkte***.

Wie zeigt man, dass 9 Punkte auf einem gemeinsamen Kreis liegen?

1. Wir werden verschiedene Sehnenvierecke finden, die paarweise genau drei Punkte gemeinsam haben. Somit liegen alle Punkte der Vierecke auf dem Umkreis dieser drei Punkte. Dies werden die Seitenmitten und die Höhenfußpunkte sein.
2. Anschließend finden wir ein weiteres Dreieck mit den gleichen Höhenfußpunkten wie im Dreieck ΔABC. Da die Seitenmitten dieses zweiten Dreiecks gerade die Euler-Punkte (Mitten der oberen Höhenabschnitte) sind, muss nach 1. unser Kreis auch Umkreis dieser drei Punkte sein.
3. Alternativ kann man auch Rechtecke mit einer gemeinsamen Diagonalen finden. Da Rechtecke immer einen Umkreis besitzen, fallen die Umkreise zusammen.
4. Da die Höhenfußpunkte senkrecht auf den Seiten (oder deren Verlängerungen) stehen, findet man hier schnell Thaleskreise, die mit den Rechtecken bei 3. gemeinsame Durchmesser besitzen, also mit den dortigen Kreisen zusammen fallen.

Erster Beweis (nach 1. und 2.)***:***



Die Verbindung zweier Seitenmitten ist parallel zur dritten Seite. Damit ist das Viereck $M_a M_b M_c H_C$ ein Trapez. Doch es gilt noch mehr:

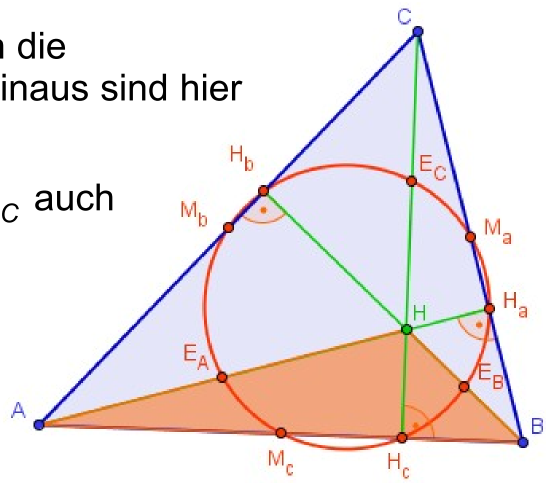
Im (rechtwinkligen) Dreieck ΔBCH_C ist $\overline{H_C M_a}$ Seitenhalbierende und aufgrund des rechten Winkels bei H_C halb so lang wie die Seite $\overline{BC}$ (Nachweis durch Streifenschar). Nun ist aber auch die Verbindung zweier Seitenmitten halb so lang wie die dritte Seite – d. h. $\overline{M_b M_c} = \overline{H_C M_a}$ und $M_a M_b M_c H_C$ ist sogar ein gleichschenkliges Trapez. Das ist toll, denn gleichschenklige Trapeze sind Sehnenvierecke.

→ $M_a M_b M_c H_C$ hat einen Umkreis.

Analog zeigt man, dass auch die beiden anderen Höhenfußpunkte mit den Seitenmitten auf gemeinsamen Umkreisen liegen. Da all diese Umkreise drei gemeinsame Punkte haben, müssen sie zusammen fallen.

Wir wissen nun, dass der Umkreis von drei Seitenmitten eines Dreiecks auch durch dessen Höhenfußpunkte verläuft. Damit muss aber auch ein Umkreis der Höhenfußpunkte die Seitenmitten treffen.

Nun sind die Höhenfußpunkte von ΔABC auch die Höhenfußpunkte im Dreieck ΔABH. Darüber hinaus sind hier zwei Euler-Punkte (E_A und E_B) Seitenmitten.



Damit ist klar, dass der Umkreis von $\Delta H_A H_B H_C$ auch durch die Euler-Punkte E_A und E_B geht.

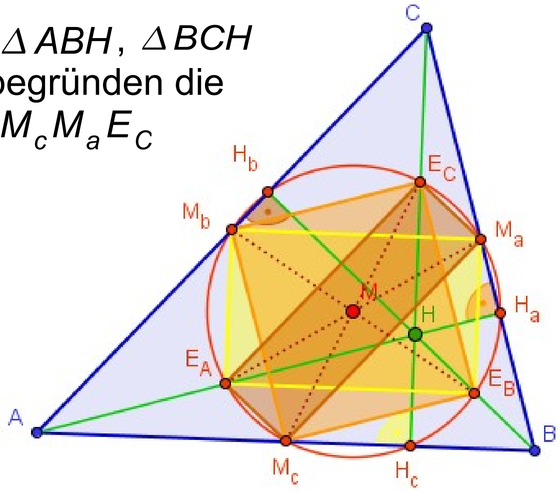
Mit einem weiteren Dreieck mit dem Höhenschnittpunkt H als Ecke folgt in gleicher Weise, dass auch E_C auf diesem Umkreis liegt.

Fassen wir den Inhalt unseres ersten Beweises zusammen:

→ Die Höhenfußpunkte, die Seitenmitten und die Euler-Punkte eines Dreiecks liegen auf einem (gemeinsamen) Kreis. ***q. e. d.***

Zweiter Beweis (nach 3. und 4.)***:***

Die Mittelparallelen zu den Seiten der Dreiecke ΔABH, ΔBCH und ΔCAH und die rechten Winkel der Höhen begründen die rechten Winkel der Rechtecke $E_A E_B M_a M_b$, $E_A M_c M_a E_C$ und $M_b M_c E_B E_C$.



Wir wissen: Rechtecke sind Sehnenvierecke (gegenüber liegende Winkel ergeben 180°). In unserem Fall sind sogar die Umkreise gleich, denn je zwei der drei Rechtecke besitzen eine gemeinsame Diagonale.

Mit den Diagonalen der Rechtecke folgt wegen den rechten Winkeln bei den Höhenfußpunkten, dass diese ebenfalls auf dem gemeinsamen Umkreis liegen müssen:

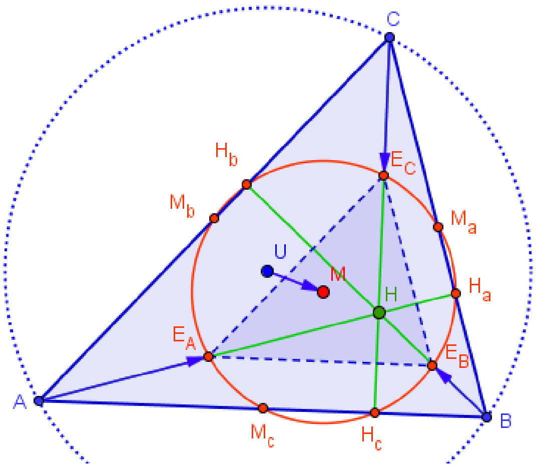
So erscheint beispielsweise die Strecke $\overline{M_a E_A}$ von H_A aus unter einem Winkel von 90°. Nach der Umkehrung (!) des Thalessatzes muss H_A damit auf einem Kreis mit $\overline{M_a E_A}$ als Durchmesser liegen. Das ist aber gerade unser gemeinsamer Umkreis. Für die anderen beiden Höhenfußpunkte gibt es in gleicher Weise je einen Durchmesser unseres Kreises. ***q. e. d.***

Bei diesem zweiten Beweis haben wir etwas mehr gezeigt, als beim ersten:

Wir haben gesehen, dass man aus dem Schnitt zweier Diagonalen von unseren Rechtecken auch den Mittelpunkt *M* des Feuerbachschkreises konstruieren kann.

Wir müssen dazu jeweils einen Euler-Punkt mit der gegenüber liegenden Seitenmitte verbinden.

Zusammenhang Feuerbachkreis – Umkreis

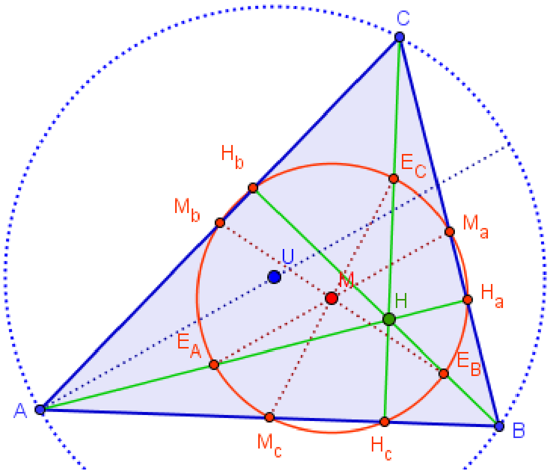


Die Euler-Punkte sind so festgelegt, dass sie jeweils die Strecke zwischen dem Höhenschnittpunkt und einer Dreiecksecke halbieren.

Strecken wir nun die Ecken *A*, *B* und *C* zentrisch mit dem Faktor 0,5 am Höhenschnittpunkt *H*, werden sie auf die Euler-Punkte abgebildet. Nun bilden zentrische Streckungen aber auch Kreise auf Kreise ab, so dass der Umkreis der Dreieckspunkte zum Umkreis der Euler-Punkte wird.

Damit gilt:

- Der Umkreismittelpunkt U (= Schnittpunkt der Mittelsenkrechten) wird durch zentrische Streckung am Höhenschnittpunkt *H* mit dem Streckfaktor 0,5 auf den Mittelpunkt *M* des Feuerbachkreises abgebildet und es gilt:
  $\frac{1}{2}\overline{HU}=\overline{HM}$ oder $\overline{HU}=2\cdot\overline{HM}$.
- Die obigen Gleichungen begründen, dass *M* genau in der Mitte zwischen *H* und *U* liegt.
- Aufgrund des Streckfaktors 0,5 ist der Radius des Umkreises doppelt so groß wie der des Feuerbachkreises. Er misst somit gerade die Strecke zwischen einer Seitenmitte und dem gegenüber liegenden Euler-Punkt.



Hinweise:

- Da die Höhen senkrecht auf den Dreiecksseiten stehen, ist der Feuerbachkreis als Umkreis der Höhenfußpunkte ein (dreifacher) Thaleskreis.
- Natürlich kann man auch den Feuerbachkreis vom Höhenschnittpunkt *H* aus durch eine zentrische Streckung mit Faktor 2 auf den Umkreis des Dreiecks abbilden.
- Bei der Euler-Geraden haben wir gelernt, dass der Schwerpunkt *S* (Schnittpunkt der Seitenhalbierenden) eines Dreiecks die Strecke $\overline{UH}$ im Verhältnis 1:2 teilt.

Weitere interessante Zusammenhänge zum Feuerbachkreis und Informationen zum relativ unbekannten 8-Punkte-Kreis findest Du im Internet unter:

http://www.matheraetsel.de/texte/feuerbach-kreis-main.pdf

http://de.wikipedia.org/wiki/Feuerbachkreis