Die fünf platonischen Körper

Unter den Polyeder (auch Vielflächler) sind die besonders regelmäßigen besonders faszinierend. Regelmäßig heißt, dass keine Ecke und keine Fläche herausgehoben ist.

Besondere Regelmäßigkeiten:

- In allen Ecken stoßen gleich viele Kanten zusammen,
- alle Flächen haben die gleiche Anzahl von Ecken,
- alle Kanten sind gleich lang und
- alle Winkel gleich groß.

Körper mit genau diesen Eigenschaften heißen ***platonische Körper***.

Mit Tetraeder, Oktaeder, Würfel, Ikosaeder und Dodekaeder kennen wir fünf platonische Körper. Eine vierseitige Pyramide ist dagegen kein platonischer Körper.

Fünf Vokale, fünf „Elemente“ und fünf Platonischen Körper:

Nach Aristoteles (* 384 v. Chr. † 322 v. Chr.) gibt es genau fünf Elemente: Feuer, Wasser, Luft, Erde und den Äther (= Himmel oder Geist). Außerdem gibt es fünf Vokale: A, E, I, O, U.

Regelmäßigkeit hatte für die Menschen des Altertums etwas Göttliches. So verwundern die folgenden Verbindungen kaum:

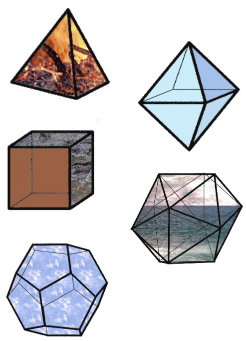
A – Feuer – Tetraeder

E – Luft – Oktaeder

I – Erde – Hexaeder

O – Wasser – Ikosaeder

U – Himmel – Dodekaeder



Inkugel – Umkugel

Jeder dieser platonischen Körper ist so symmetrisch aufgebaut, dass man eine so genannte Inkugel konstruieren kann. Diese berührt jede seiner Flächen. Darüber hinaus gibt es auch eine Umkugel, auf der alle Ecken liegen. Die Radien dieser Kugeln findet man in jeder besseren mathematischen Formelsammlung.

Dualität

Verbindet man die benachbarten Seitenmitten bei einem platonischen Körper, erhält man einen (inneren) Körper, der wiederum selbst ein platonischer Köper ist. Diese Beziehung zwischen zwei platonischen Körpern nennt man ***Dualität***. (Nur der Tetraeder ist zu sich selbst dual.)

Sind es wirklich nur fünf platonische Körper?

Behauptung: Es gibt genau 5 platonische Körper.

Beweis:

Schritt 1 (platonische Körper können nur aus 3-, 4- oder 5-Ecken bestehen)***:***

Zunächst stellen wir fest, dass die Summe aller an einer Ecke zusammen treffenden Innenwinkel kleiner als 360° sein muss. Wäre sie genau 360°, würden die Flächen in einer Ebene liegen – und bei mehr als 360° wäre keine Ecke mehr möglich.

Hieraus folgt sofort, dass es keinen platonischen Körper mit regelmäßigen Sechsecken als Begrenzungsflächen geben kann. Die größtmögliche Eckenzahl ist damit fünf.

Schritt 2 (Wir überlegen, wie viele Dreiecke, Vierecke bzw. Fünfecke an einer Polyederecke zusammen treffen können)***:***

Ein regelmäßiges Dreieck besitzt einen Innenwinkel von 60°. Somit können höchstens fünf Dreiecke an einer Polyederecke zusammen treffen. Bei sechs Dreiecken wäre die Winkelsumme an der Ecke gleich 360°. Das ist nach den obigen Überlegungen unmöglich.
Damit es eine Ecke gibt, müssen mindestens drei Dreiecke zusammen treffen.

Wir halten fest:

Es kann höchstens drei regelmäßige Polyeder mit dreiseitigen Flächen geben. Diese existieren tatsächlich. (Welche?)

Die gleichen Überlegungen zeigen, dass mit regelmäßigen Vierecken nur ein regulärer Polyeder gebildet werden kann. Das gleiche gilt für das regelmäßige Fünfeck als Seitenfläche.

Zählen wir alles zusammen, kommen wir auf fünf Möglichkeiten.

Bemerkung: Dieser Beweis zeigt, dass es nicht mehr als fünf Platonische Körper geben kann. Das diese tatsächlich existieren geht nicht daraus hervor. Wir kennen aber bereits fünf reguläre Polyeder. Damit ist auch ihre Existenz bewiesen.

q.e.d. (quod erat demonstrandum – was zu beweisen war)

Alternativbeweis mit der eulerschen Polyederformel

Beim folgenden Alternativbeweis geht man von einem (allgemeinen) platonischen Körper mit *n*-eckigen (somit auch *n*-seitigen) Flächen aus.
Im Gegensatz zur obigen Lösung, verlässt man hier die geometrische Anschauung, formuliert algebraische Regeln und sucht Lösungen für eine mathematische Ungleichung. Jede dieser Lösungen entspricht schließlich einem möglichen platonischen Körper.

Vorbemerkung:

Die Zahl der Kanten, die von einer Ecke weg gehen, bezeichnet man als ***Eckengrad***. Da jede Kante genau zwei Ecken verbindet, muss die Gesamtsumme aller Eckengrade genau doppelt so groß sein, wie die Zahl der Kanten. (Überprüfe dies an einem beliebigen Polyeder.)
Beachte, dass bei platonischen Körpern aufgrund der obigen Winkelsummen-Überlegung nur Eckengrade zwischen 3 und 5 auftreten können.

Wir benutzen die eulerschen Polyederformel: $e+f-k=2$. Hierbei steht der Buchstabe *e* für die Zahl der Ecken, *f* ist eine Variable für die Zahl der Flächen, und hinter *k* verbirgt sich die Kantenzahl des Polyeders:

- Wir bezeichnen den Eckengrad mit *g*. *Da die Summe aller Eckengrade doppelt so groß ist wie die Anzahl der Kanten* (→ Vorbemerkung), gilt:

$$e \cdot g = 2 \cdot k \quad \rightarrow \quad e = \frac{2 \cdot k}{g}$$

- Nun drücken wir die Flächen durch die Kanten aus: *Jede Fläche hat die gleiche Anzahl von Kanten, nämlich n. Und da jede Kante zwei Flächen begrenzt,* gilt:

$$f \cdot n = 2 \cdot k \quad \rightarrow \quad f = \frac{2 \cdot k}{n}$$

- Mit der Eulersche Polyederformel ergibt dies $\frac{2k}{g} + \frac{2k}{n} - k = 2$

  Diesen Ausdruck teilen wir durch $2k$: → $\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{k}$

- Die entscheidende Beweisidee beinhaltet, dass die Kantenzahl positiv ist. Damit ist nämlich auch der Ausdruck auf der linke Seite positiv:

$$\frac{1}{g} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} > 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{g} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2}}$$

- Wie in der Vorbemerkung erwähnt, kommen für *g* und *n* nur die Zahlen 3, 4, 5, ... in Frage. Das setzen wir ein und rechnen:

  $g=3; n=3$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$

  $g=3; n=4$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$

  $g=3; n=5$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$

  $g=3; n=6$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

  $g=4; n=3$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$

  $g=5; n=3$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15} > \frac{1}{2}$

  $g=6; n=3$: $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

  $g=4; n=4$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

  Tatsächlich gibt es genau fünf Möglichkeiten für die Ungleichung. Die Existenz der entsprechenden fünf Körper haben wir bereits nachgewiesen. q.e.d

Link-Tipp: http://did.mat.uni-bayreuth.de/mmlu/platon/lu/geometrie_frameset.htm