

Einführung Trigonometrie (Teil 4)

Verschiebung und Streckung des Schaubildes der Sinusfunktion

Viele Zusammenhänge unseres Alltagslebens wiederholen sich periodisch und lassen sich in guter Näherung durch eine Sinusfunktion beschreiben.

Das das nebenstehende Schaubild findet man unter <http://www.klimadiagramme.de/Bawue/freiburg.html>.

Wir wollen im Folgenden lernen, wie man mit Hilfe der Sinusfunktion den hier beschriebenen Schaubildverlauf annähert.

Vorüberlegungen:

Zunächst suchen wir nach grundlegenden Unterschieden zum Schaubild von $f(x) = \sin x$.

1. Bei der Temperaturkurve beträgt die Periode 12 [Monate] (anstatt 2π).
2. Die Wertemenge ist $[2; 20]$ anstatt $[-1, 1]$
3. Der Mittelwert liegt bei ca. $(2+20):2 = 11$ [Grad Celsius] (anstatt 0).
4. Der Mittelwert wird erst im April, also bei 4 [Monaten], von unten nach oben durchschritten (anstatt 0).

Hieraus folgt, dass wir das Schaubild der Sinusfunktion sowohl in x- als auch in y-Richtung strecken und verschieben müssen.

Schritt 1 (Streckung in x-Richtung):

Wir benötigen die Informationen aus der ersten Vorüberlegung.

Wegen $2\pi \cdot k = 12$ folgt für den Streckfaktor: $k_x = \frac{12}{2\pi} = \frac{6}{\pi}$.

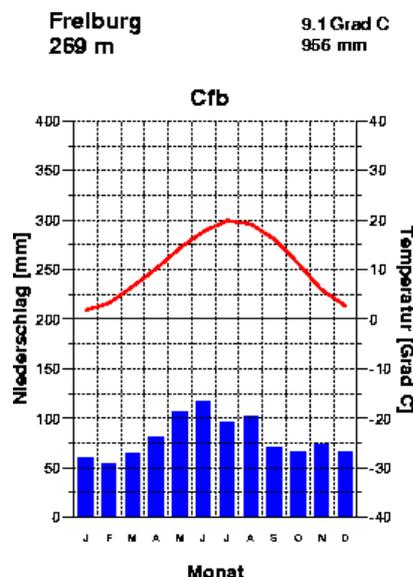
Das Schaubild von $f(x) = \sin x$ wird mit dem Faktor k_x in x-Richtung gestreckt, wenn man jede Funktionsvariable mit dem Kehrwert von k_x multipliziert.

$$\text{Wir erhalten: } f_1(x) = f\left(\frac{1}{k_x} \cdot x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right)$$

Schritt 2 (Streckung in y-Richtung):

Aus den Vorüberlegungen 2 und 3 erkennen wir, dass die Werte unserer neuen Funktion um $20 - 11 = 9$ [Kelvin] um die mittlere Temperatur schwanken. Dies erreichen wir durch eine Streckung in y-Richtung mit dem Faktor $k_y = 9$.

$$\text{Damit gilt: } f_2(x) = k_y \cdot f_1(x) = 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot x\right).$$



Schritt 3: (Verschiebung in x-Richtung):

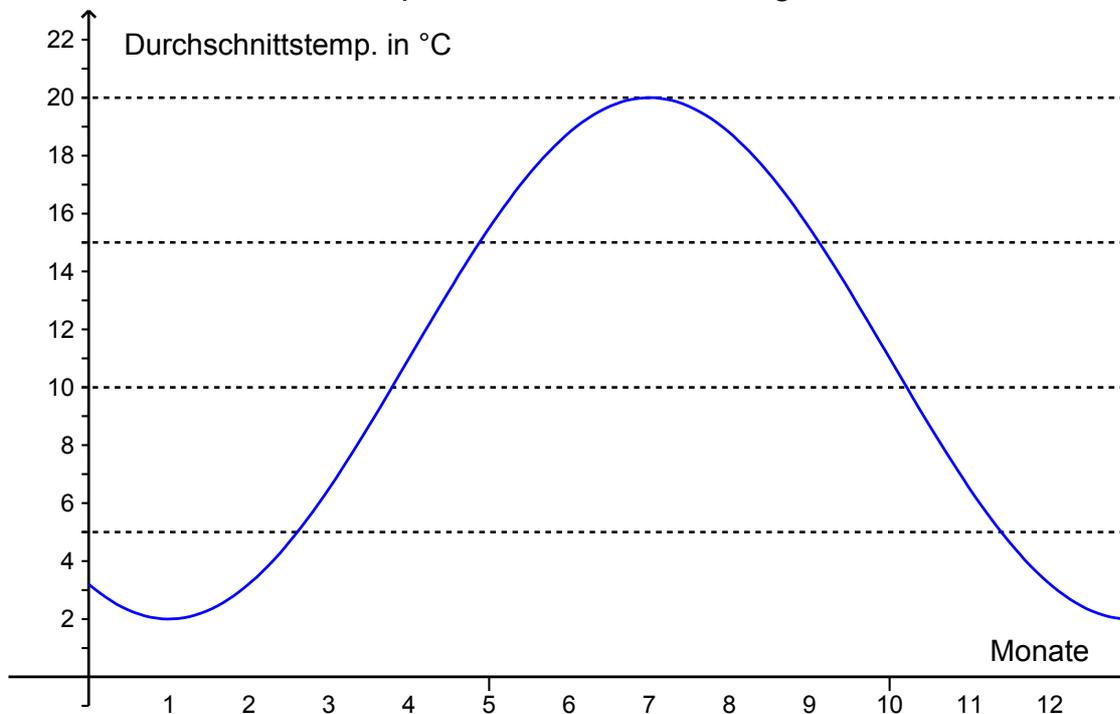
Den Durchgang durch den Mittelwert bei 4 anstatt 0 erreichen wir durch eine Verschiebung um 4 in x-Richtung. Im zugehörigen Funktionsterm müssen wir dazu jede Funktionsvariable x durch $(x - 4)$ ersetzen.

$$\text{Es folgt: } f_3 = f_2(x - 4) = 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 4)\right).$$

Schritt 4: (Verschiebung in y-Richtung):

Zu guter Letzt müssen wir den Mittelwert von 0 auf 11 [°C] anheben. Dies gelingt durch eine Verschiebung in y-Richtung um 11 [Kelvin]. Beim Funktionsterm addieren wir hierfür diesen Verschiebungswert:

→ Mit $f_4(x) = f_3(x) + 11 = 9 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (x - 4)\right) + 11$ können wir den durchschnittlichen Temperaturverlauf in Freiburg simulieren.



Aufgabe:

Löse die Aufgaben 4 und 5 vom Arbeitsblatt unter <http://www.klassenarbeiten.net/klassenarbeiten/uebungen/klasse10/mathematik/trigonometrie/sinusfunktion.shtml>

Begriffe und Bemerkungen:

In unserem Funktionsterm von $f_4(x)$ tauchen verschiedene Zahlenwerte auf, die für die Streckungen und Verschiebungen des Schaubildes verantwortlich sind.

Ersetzt man diese Zahlenwerte durch Buchstaben (Parameter), erhält man die

Funktionsgleichung der Sinusfunktion in der allgemeinen Form:

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d = a \cdot \sin\left(b \cdot \left(x + \frac{c}{b}\right)\right) + d$$

Eine Info für Physiker: Eine Schwingung, die sich durch solch eine Sinusfunktion beschreiben lassen, heißt **harmonische Schwingung**.

- Bei dem Parameter a handelt es sich um den Streckfaktor in y -Richtung. Sein Betrag beschreibt den maximalen Abstand vom Mittelwert. Daher heißt $|a|$ **Amplitude** (auch **Schwingungsweite**).
- Der Kehrwert von b ist unser Streckfaktor in x -Richtung. Mit $\frac{2\pi}{b} = T$ erhalten wir den Wert für die **Periodendauer T** .
- Bildet man den Kehrwert der Periodenlänge, so erhält man die **Frequenz** $f = \frac{1}{T} = \frac{b}{2\pi}$. Sinnvollerweise wählt man für b nur positive Werte, denn die Frequenz lässt sich auch als Schwingungsanzahl pro Sekunde interpretieren.
- Der Bruch $\frac{c}{b}$ gibt die Verschiebung in x -Richtung an. Man nennt den Ausdruck gelegentlich Nullphase.
- Der Parameter d legt den Mittelwert der Sinusschwingung fest. Oft legt man das Koordinatensystem gerade so, dass dieser Mittelwert null beträgt.

Aufgaben:

1. Bei welchen Werten für die Amplitude handelt es sich um eine Stauchung (in y -Richtung)?
2. Wie muss man a wählen, um das Schaubild der Sinusfunktion an der x -Achse zu spiegeln?
3. Warum sollte man bei der Suche nach dem Funktionsterm zunächst die Streckungen und dann erst die Verschiebungen durchführen? Was geschieht im umgekehrten Fall?
4. Beim Kammerton a beträgt die Frequenz 440 Hz (Schwingungen pro Sek.). Gib die Periodendauer (in Sekunden) an. Beschreibe solch eine Schwingung durch eine Sinusfunktion.
5. Die Nullphase kann man sich als Differenz von der Gleichgewichtslage zu Beginn der Schwingung ($t=0$) vorstellen. In welche Richtung wird das Schaubild der Sinusfunktion verschoben, wenn die Nullphase positiv ist. Bilde ein Beispiel mit konkreten Zahlenwerten.