Wahrscheinlichkeit P(X = k) für genau k Treffer

Beispiel:
Multiple-Choice-Test: n Fragen, jeweils vier vorgegebene Antworten, von denen nur eine richtig ist.
Ein Kandidat kreuzt rein zufällig je eine Antwort an.

Trefferwahrscheinlichkeit: $p = \frac{1}{4}$;

Wahrscheinlichkeit für "Niete": $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

1) n = 3

Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:
- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q.
- Es gibt **3** Pfade, die zu $X = 2$ führen.
- Somit gilt: $P(X = 2) = 3 \cdot p^2 \cdot q = \frac{9}{64}$.

2) n = 4

Wahrscheinlichkeit P(X = 2) für genau zwei Treffer:
- Jeder Pfad hat die Wahrscheinlichkeit p^2q^2.
- Es gibt **6** Pfade, die zu $X = 2$ führen.
- Somit gilt: $P(X = 2) = 6 \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{27}{128}$.

3) Die Anzahl der Pfade mit zwei Treffern hängt von der Länge n der Bernoullikette ab:

Neue Schreibweise:

n = 3: $\binom{3}{2} = 3$ (lies "2 aus 3" oder “3 über 2")

n = 4: $\binom{4}{2} = 6$ (lies "2 aus 4" oder “4 über 2")

n = 3: $P(X = 2) = \binom{3}{2} \cdot p^2 \cdot q = \frac{9}{64}$

n = 4: $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot p^2 \cdot q^2 = \frac{27}{128}$

$\binom{\mathbf{n}}{\mathbf{k}}$ heißt **Binomialkoeffizient**

Bei einer Bernoulli-Kette der Länge **n** mit der Trefferwahrscheinlichkeit **p** lässt sich die **Wahrscheinlichkeit für genau k Treffer** nach der **Bernoulli-Formel** berechnen:

$$\mathbf{P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot \underbrace{p^k \cdot q^{n-k}} = B_{n;p}(k)} \quad (q = 1 - p)$$

Anzahl der Pfade mit k Treffern

Wahrscheinlichkeit für <u>einen</u> Pfad mit k Treffern