Binomialverteilung

Beschreibt die Zufallsvariable X die Trefferzahler bei einer Bernoullikette, so heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X **Binomialverteilung**. Es gilt:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

Die Zufallsvariable X heißt **binomialverteilt** mit den Parametern n und p, kurz $B_{n;p}$ –verteilt.

Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsvariablen

Beispiel:
Welche Trefferzahl wird man bei 30 Freiwürfen erwarten, wenn ein Basketballspieler mit 60% Wahrscheinlichkeit trifft?

Erwartungswert: $30\cdot\frac{60}{100}=18$ d.h. allgemein: $\mu=E(X)=n\cdot p$.

genauer: $E(X)=k_1\cdot P(X=k_1)+....+k_n\cdot P(X=k_n)$

Z.B. für n = 3 erhält man:

k	0	1	2	3
P(X = k)	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3

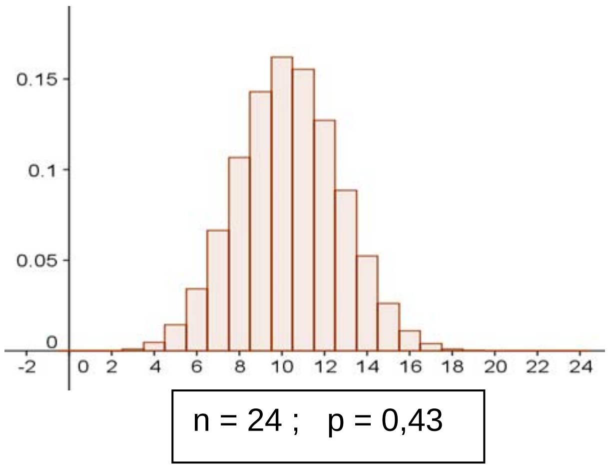
$$\begin{aligned}E(X)&=0\cdot q^3+1\cdot 3pq^2+2\cdot 3p^2q+3\cdot p^3\\&=3pq^2+6p^2q+3\cdot p^3\\&=3p\cdot(q^2+2qp+p^2)\\&=3p\cdot(\underbrace{q+p}_{=1})^2=3p\end{aligned}$$

Für die allgemeine Herleitung wird der binomische Lehrsatz benötigt.

Schaubildern von binomialverteilten Zufallsvariablen

→ Binomiver
→ BinomiVerSum
→ Excel
→ Mathe-Interaktiv

Maximum der Binomialverteilung



$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

$$=\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

$$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}=\frac{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}{(k+1)!}p^{k+1}\cdot q^{n-k-1}}{\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}p^k\cdot q^{n-k}}=\frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}$$

- $$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}>1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{n-k}{k+1}\cdot\frac{p}{q}>1 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot p-k\cdot p>k\cdot q+q$$
  $$\Leftrightarrow\quad n\cdot p-q>\underbrace{(p+q)}_{=1}\cdot k \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot p-q>k$$
- $$\frac{P(X=k+1)}{P(X=k)}<1 \quad\Leftrightarrow\quad n\cdot p-q<k$$

Wenn $E(X)=n\cdot p$ ganzzahlig ist, dann ist bei E(X) das **Maximum**.