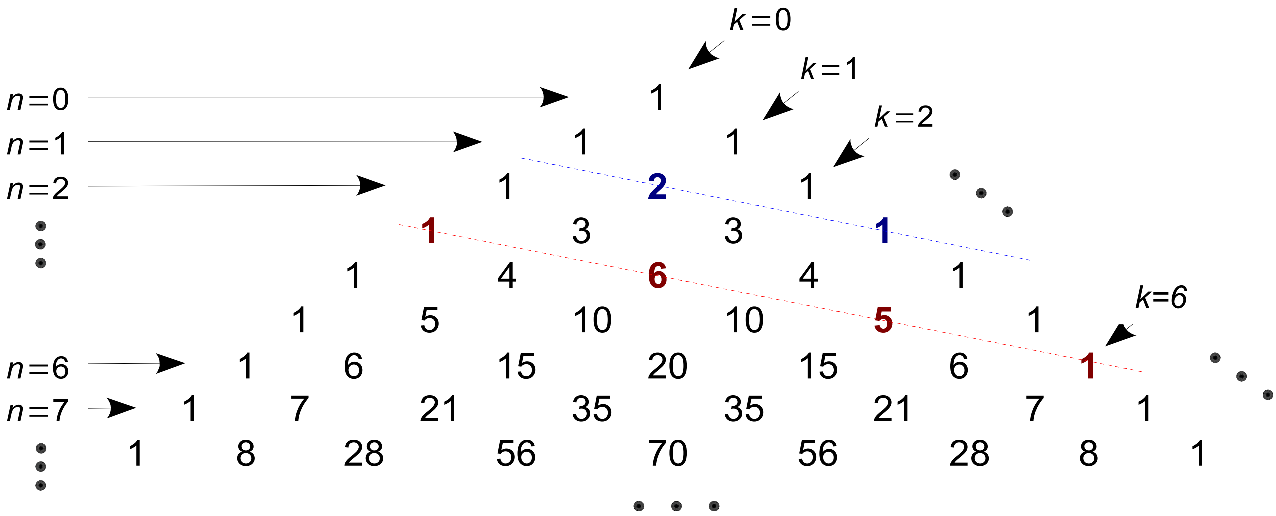
Das Pascalsche Dreieck



Die obige Zahlenanordnung wird nach dem französischen Gelehrten Blaise Pascal (* 1623 - † 1662) „***Pascalsches Dreieck***“ genannt.

Der „Aufbau“ beginnt in Zeile 0 ($n=0$) mit einer Eins. Am Rand jeder neuen Zeile steht auf beiden Seiten eine weitere 1. Alle anderen Einträge entstehen aus der Summe der beiden darüber liegenden Zahlen:

Zunächst scheint es ein einfaches Zahlenspiel zu sein, doch der Inhalt steckt voller schöner Mathematik. So haben die Zahlen im Pascalschen Dreieck neben der Symmetrie viele weitere interessante Eigenschaften:

a) Die zweite Zahl entspricht immer der „Zeilennummer n“. Man beginnt bei der Nummerierung mit der „nullten Zeile“.

   Die vorletzte Zahl in jeder Zeile entspricht immer der „Diagonalennummer k“. Wieder beginnt man beim Zählen mit der „nullten Diagonalen“.

   Mit dieser Festlegung lassen sich den Einträgen im Pascalschen Dreieck mit Hilfe der Zeilen- und Diagonalennummern „Koordinaten“ zuweisen:

   $\binom{6}{4}$ (sprich: „sechs über vier“) bezeichnet den Eintrag in der 6. Zeile und der 4 Diagonalen $(=15)$.

   Bei einem wissenschaftlichen Taschenrechner lassen sich diese Zahlen mit der „***nCr***-Taste“ bestimmen.

b) Aufgrund der Symmetrie im Pascalschen Dreieck gilt stets $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$. (***Beachte:*** Bei allen Einträgen längs einer Zeile ist k stets kleiner oder gleich n.)

c) Die Summe aller Zahlen der n-ten Zeile ergibt stets die 2-er-Potenz 2^n.

d) Die zweite „Diagonale“ ($k=2$) enthält die „Dreieckszahlen“ (=Summen der darüber liegenden ersten aufeinander folgenden natürlichen Zahlen): $1;3,6,10,15;\ldots$, denn $1+2=3$, $1+2+3=6$ usw.

e) In der dritten Diagonalen ($k=3$) liegen die Summen der darüber liegenden Dreieckszahlen $(10=1+3+6;20=1+3+6+10;\ldots)$.

f) Allgemein beinhaltet jeder Eintrag die Summe der darüber liegenden Diagonaleneinträge.

Mathematisch ausgedrückt sieht das etwas kompliziert aus:

$$\binom{n}{k}=\binom{k-1}{k-1}+\binom{k}{k-1}+\binom{k+1}{k-1}+\ldots+\binom{n-1}{k-1}$$

g) Die Zahlen in der n-ten Zeile entsprechen stets den Koeffizienten (=Zahlfaktoren) der „***Binome***“ $(a\pm b)^n$. (Sie werden daher auch ***Binomialkoeffizienten*** genannt.)

Beispiel: $(a-b)^2=(\mathbf{1}\cdot)a^2-\mathbf{2}\cdot ab+(\mathbf{1}\cdot)b^2$

$(a+b)^3=a^3+\mathbf{3}a^2b+\mathbf{3}ab^2+b^2$

$(a-b)^5=a^5-\mathbf{5}a^4b+\mathbf{10}a^3b^2-\mathbf{10}a^2b^3+\mathbf{5}ab^4-b^5$

h) Der k-te Eintrag in der n-ten Zeile hat auch eine kombinatorische Bedeutung:

$\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, aus einer Gruppe von n Elementen genau k Elemente ohne Beachtung der Reihenfolge auszuwählen. Somit entspricht die Zahl $\binom{49}{6}=13.983.816$ den verschiedenen Möglichkeiten, beim Lotto „6 aus 49“ genau 6 Richtige zu tippen.

i) Etwas „versteckt“ liegen die nach *Leonardo da Pisa* (auch *Fibonacci,* * 1180 (?) - † 1241(?)) benannten „***Fibonacci-Zahlen***“ $1;1;2_{=1+1};3_{=1+2};5_{=2+3};8;13;21;34;\ldots$ Die Summe der Einträge in den „flachen Diagonalen“ ergibt jeweils eine Fibonacci-Zahl . Als Beispiel sind im obigen Dreieck die vierte und die siebte „Flachdiagonale“ blau bzw. rot gekennzeichnet: $3=F_4$ bzw. $13=F_7$

j) Addiert man zwei unter einander stehende Zahlen der zweiten Diagonalen, so ergibt sich stets eine Quadratzahl.

k) Markiert man gerade und ungerade Zahlen im Pascalschen Dreieck, ergeben sich überraschende Regelmäßigkeiten.