Differenzialgleichungen (DGL) beim Wachstum

Bei Wachstumsprozessen beschreiben Differenzialgleichungen das Änderungsverhalten eines Bestandes zu einem Zeitpunkt *t*. Damit darf (soll !) die DGL hier als momentane Änderungsrate eines Bestandes verstanden werden.

Die Lösungen von Differenzialgleichungen sind Funktionen – keine Zahlen!

Die folgenden DGL des exponentiellen und beschränkten Wachstums werden durch die entsprechenden Bestandsfunktionen erfüllt. Wir können somit mit Hilfe der Änderungsrate auf den Bestand schließen.

1. Exponentielles Wachstum

Beim exponentiellen Wachstum ist die Änderungsrate proportional zum alten Bestand. Dies führt zur

> ***Differenzialgleichung des exponentiellen Wachstums:*** $f'(t)=k\cdot f(t)$
>
> Die ***Wachstumskonstante k*** darf nicht 0 sein. Bei negativem *k* ist die Änderungsrate negativ. In solch einem Fall handelt es sich um einen ***exponentiellen Zerfall***.

Mit Hilfe der *e*-Funktion erhält man hieraus die zugehörige Bestandsfunktion.

> ***Bestandsfunktion des exponentiellen Wachstums:*** $f(t)=c\cdot e^{k\cdot t}$, mit $c\in\mathbb{R}$
>
> Beachte, dass jede dieser Funktionen die obige Differenzialgleichung erfüllt. Zur Bestimmung des Wertes für c ($\widehat{=}$ Anfangsbestand für $t=0$) sind weitere Informationen notwendig.

2. Beschränktes Wachstum

Beim beschränkten Wachstum ist die Änderungsrate proportional zum so genannten ***Sättigungsmanko*** (= Differenz zwischen oberen (bzw. unteren) ***Schranke S*** und dem alten Bestand $f(t)$). Kurz: Sättigungsmanko = $S-f(t)$. Wie oben erhalten wir die

> ***Differenzialgleichung des beschränkten Wachstums:*** $f'(t)=k\cdot(S-f(t))$
>
> Die ***Wachstumskonstante k*** ist hierbei stets positiv. Die Wahl von *S* ist beliebig.

Diese DGL lösen wir durch ***Substitution***. Hierbei ersetzten wir das Sättigungsmanko durch eine Hilfsfunktion: $h(t)=S-f(t)$. Ableiten dieser Hilfsfunktion ergibt $h'(t)=-f'(t)$ oder $f'(t)=-h'(t)$.

Hiermit folgt für die DGL: $f'(x)=k\cdot h(x) \;\rightarrow\; -h'(x)=k\cdot h(x) \;\rightarrow\; h'(x)=-k\cdot h(x)$.

Für $k>0$ stimmt diese letzte Gleichung mit der obigen Differenzialgleichung beim exponentiellen Zerfall überein.

Mit $h(t)=c\cdot e^{-k\cdot t}$ folgt durch Rücksubstitution die Lösung unserer DGL:
$f(t)=S-h(t)=S-c\cdot e^{-k\cdot t}$

> ***Bestandsfunktion des beschränkten Wachstums:***
>
> $f(t)=S-c\cdot e^{-k\cdot t}$, mit $S, c\in\mathbb{R}$ und $k>0$
>
> Für $c<0$ liegt der Anfangsbestand $(S+|c|)$ über der Schranke S. Es handelt sich dann um einen beschränkten Zerfall. Für $c>0$ ist S eine „obere" Schranke und $f(t)$ beschreibt eine beschränktes Wachstum. (Beachte, dass *k* hier stets positiv ist.)