

Bewegungsaufgabe U-Boot

Bei einer militärischen Übung soll der Kurs eines U-Boots bestimmt werden, um dieses mit Flugzeugen anzugreifen.

Zwei Schiffe orten hierzu nacheinander das U-Boot und geben die Koordinaten an eine Flugzeugstaffel weiter.

Wenn das U-Boot zum ersten Mal geortet wird, dauert es 30 Minuten, bis die Flugzeuge vor Ort sind. (Hierbei wird von einer gleichförmigen und geradlinigen Bewegung des U-Bootes ausgegangen.)



Bei der ersten Ortung peilt das Schiff A von der Position $(0|0|0)$ das U-Boot in der Richtung $\vec{x}_A = \left(6|9|-\frac{1}{2}\right)$ an. Zur gleichen Zeit meldet das Schiff B (Position $(0|4|0)$) die Richtung $\vec{x}_B = \left(3|4|-\frac{1}{4}\right)$. Vier Minuten später ergibt die zweite Peilung der beiden Schiffe die U-Boot-Koordinaten $\left(23|36|-\frac{9}{4}\right)$.

(Alle Angaben in Kilometern.)

- Berechne die Koordinaten des U-Bootes bei der ersten Peilung.
- Befindet es sich das U-Boot auf einer Steig- oder Sinkfahrt?
- Mit welcher Geschwindigkeit (in Kilometern pro Stunde) bewegt es sich?
- Gib eine Geradengleichung für die U-Boot-Bewegung an, bei der die Geschwindigkeit des U-Bootes (in km/h) vorkommt.
Welche physikalische Bedeutung hat in solch einem Fall der Parameter?
- Wo befindet sich das U-Boot beim Eintreffen der Flugzeuge, wenn man von einer gleichförmigen, geradlinigen Bewegung ausgeht?
- Die (ebenfalls geradlinige und gleichförmige) Bewegung eines zweiten U-Bootes lässt sich durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 19 \\ 31 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ beschreiben.

(Ab dem Beginn der Ortung des ersten U-Bootes; t in Stunden)

Berechne die minimale Entfernung der beiden U-Boote. Passieren sie diesen Punkt bevor die Flugzeuge eintreffen?

Lösung:

zu a)

$$\text{„Ortungsgeraden“: } g_A: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -0,5 \end{pmatrix} \quad g_B: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -0,25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Schnittpunkt } P_1: \quad x_1 &= 0 + 6 \cdot t = 0 + 3s \quad \rightarrow \quad s = 2 \cdot t \\ x_2 &= 0 + 9 \cdot t = 4 + 4s \quad \rightarrow \quad t = 4 \\ x_3 &= 0 - 0,5 \cdot t = 0 - 0,25s \end{aligned}$$

$$\rightarrow P_1 = 4 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix}$$

zu b)

$$\text{Aus } P_1 \text{ und } P_2 = \begin{pmatrix} 23 \\ 36 \\ -2,25 \end{pmatrix} \text{ folgt der Richtungsvektor } \overrightarrow{P_1 P_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0,25 \end{pmatrix}.$$

Da die x_3 -Komponente negativ ist, befindet sich das U-Boot auf Sinkfahrt.

zu c)

$$\text{Die in 4 Minuten zurückgelegte Strecke: } |\overrightarrow{P_1 P_2}| = \sqrt{1^2 + 0,25^2}$$

$$\text{Die in 60 Minuten zurückgelegte Strecke: } \sqrt{1^2 + 0,25^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 60 \approx 15,5 \text{ [km]}$$

→ Das U-Boot bewegt sich mit einer Geschwindigkeit von ca. 15,5 km/h.

zu d)

$$g_{U\text{-Boot 1}}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \frac{60}{4} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -0,25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 36 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -3,75 \end{pmatrix}$$

Der Parameter t steht hier für die seit der ersten Ortung vergangenen **Zeit in Stunden**.

zu e)

Mit $t=0,5$ folgt für die U-Boot-Koordinaten nach 30 Minuten: **(16,5|36|-3,9)**

zu f)

Abstandsfunktion U-Boot 1 – U-Boot 2 in Abhängigkeit der Zeit t (in Stunden):

$$d(t) = \sqrt{(24 - 15t - (19 + 2t))^2 + (36 - (31 + 13t))^2 + (-2 - 3,75t - (-4 + 0,5t))^2}$$

Mit dem GTR ergibt sich für das Minimum: $d(0,333) \approx 1,1$ [km].

Der minimale Abstand von ca. 400 Metern wird somit nach ca. 20 Minuten erreicht (1/3 von 1 Stunde) – also noch bevor die Flugzeuge eintreffen.