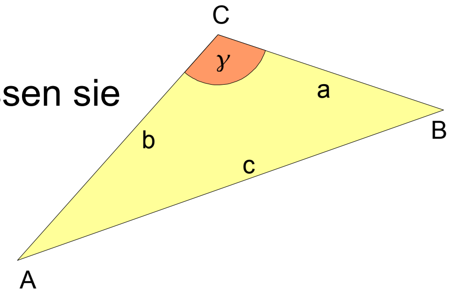
Das Skalarprodukt



Wir können inzwischen Vektoren addieren – aber lassen sie sich auch multiplizieren?

Mit Hilfe des Kosinussatzes finden wir im Folgenden eine sinnvolle Deutung für solch eine Multiplikation.

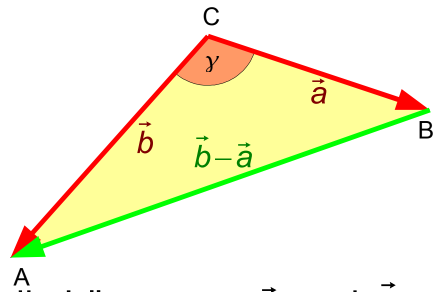
Erinnern wir uns:

Der ***Kosinussatz*** kann als eine Verallgemeinerung des Satzes von Pythagoras aufgefasst werden:

In jedem Dreieck gilt: $\boldsymbol{a^2+b^2-2\cdot ab\cos\gamma=c^2}$. (1)

(Mit $\cos 90° = 0$ folgt hieraus der Satz des Pythagoras als Spezialfall.)

Die Aussage (1) wollen wir nun mit Vektoren beschreiben. Hierzu „legen“ wir auf die Dreiecksseiten Vektoren:



Mit $\vec{a}=\overrightarrow{CB}$ und $\vec{b}=\overrightarrow{CA}$ folgt aus (1) für die dritte Dreiecks***länge*** $c=|\vec{b}-\vec{a}|$:

$$|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-2\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\gamma=|\vec{b}-\vec{a}|^2 \qquad (2)$$

Beachte: Aufgrund der Betragsstriche geht hier nur die Länge von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in die Gleichung ein.

Erinnerung: Länge von $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ analog: $|(\vec{b}-\vec{a})|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

In Anlehnung an die zweite binomische Formel bilden wir aus der Gleichung (2) unsere Definition für das Skalarprodukt:

Definition: Für zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und deren eingeschlossenen Winkel γ versteht man unter dem ***Skalarprodukt*** den Ausdruck

$$\vec{a}\cdot\vec{b}:=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\gamma$$

Wiederum mit der Gleichung (2) erhalten wir eine alternative Darstellung des Skalarproduktes, die eine einfache Berechnung ermöglicht, wenn die Koordinaten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gegeben sind:

Aus (2) folgt:

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma=\frac{1}{2}\cdot\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2-|\vec{b}-\vec{a}|^2\right). \qquad (3)$$

Mit den Vektorkoordinaten $\vec{a}=(a_1|a_2|a_3)$ und $\vec{b}=(b_1|b_2|b_3)$ und den daraus resultierenden Vektorlängen erhält man aus der rechten Seite von (3) durch Vereinfachen die zweite Darstellung des Skalarprodukts.

Übungsaufgabe: Vereinfache die rechte Seite von (3) mit Hilfe der Vektorkoordinaten $\vec{a}=(a_1|a_2|a_3)$ und $\vec{b}=(b_1|b_2|b_3)$.