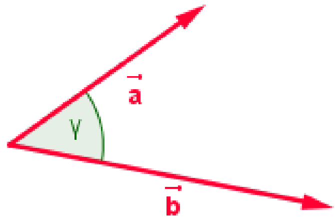
# Eigenschaften des Skalarproduktes

In der Regel wird das Skalarprodukt über die Formel $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\gamma$ definiert. Hierbei steht $|\vec{a}|$ für die Länge des Vektors $\vec{a}$. Mit $\gamma$ als eingeschlossener Winkel ergeben sich direkt die folgenden




## Eigenschaften:

1. Das Skalarprodukt eines Vektors mit sich selbst ist gleich dem Quadrat seiner Länge und daher niemals negativ.
   Es ist genau dann null, wenn der Vektor der Nullvektor ist.
   Kurz: $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2\geq 0$ und aus $\vec{a}\cdot\vec{a}=0$ folgt: $\vec{a}=\vec{0}$.
2. Das Skalarprodukt ist symmetrisch. D. h. $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ (Kommutativgesetz).
3. Es gilt das Distributivgesetz: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.
4. Für die Multiplikation mit einer reellen Zahl *r* gilt: $r\cdot\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(r\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}$.
5. Für $\vec{a}\neq\vec{0}$ und $\vec{b}\neq\vec{0}$ ist das Skalarprodukt genau dann null, wenn die beiden Vektoren orthogonal zueinander sind.
6. Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann positiv (negativ), wenn der Winkel spitz (stumpf) ist (→ siehe unten).
7. Das Ergebnis beim Skalarprodukt zweier Vektoren ist kein Vektor, sondern eine Zahl (Skalar).
8. Neben der Darstellung des Skalarprodukts mit Vektorlängen und Winkel gibt es eine weitere Darstellung mit den Koordinaten der Vektoren:
   Hierbei gilt: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.

Die Gültigkeit von dieser Eigenschaften folgt unmittelbar aus der obigen Definition.

Die Eigenschaft 2. folgt direkt aus 8. (aufgrund des Kommutativgesetzes der Multiplikation reeler Zahlen) oder mit Hilfe der Kosinusfunktion (gerade!).

Zum Nachweis von 8. beschreiben wir $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Linearkombination mit den (zueinander orthogonalen) Einheitsvektoren $\vec{e}_1=\left(1|0|0\right), \vec{e}_2=\left(0|1|0\right)$ und $\vec{e}_3=\left(0|0|1\right)$. Für beliebige reelle Zahlen $a_{1,}a_{2,}a_{3,}b_{1,}b_2$ und $b_3$ folgt:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_1\cdot\vec{e}_1+a_2\cdot\vec{e}_2+a_3\cdot\vec{e}_3\right)\cdot\left(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3\right)$$

$$\underset{3.}{=}a_1\cdot\vec{e}_1\cdot\left(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3\right)+a_2\cdot\vec{e}_2\cdot\left(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3\right)+a_3\cdot\vec{e}_3\cdot\left(b_1\cdot\vec{e}_1+b_2\cdot\vec{e}_2+b_3\cdot\vec{e}_3\right)$$

$$\underset{3.,4.}{=}a_1b_1\cdot\underbrace{\vec{e}_1\vec{e}_1}_{=1\ (1.)}+\underbrace{a_1b_2\cdot\vec{e}_1\vec{e}_2+a_1b_3\cdot\vec{e}_1\vec{e}_3}_{=0,\ \text{da}\ \vec{e}_1\perp e_2\ \text{und}\ e_2\ (5.)}+a_2b_2\cdot 1+0+a_3b_3\cdot 1+0$$