

Für die schriftliche Fachhochschulreifeprüfung sind nur die Inhalte der Seiten 1 bis 6 der Merkhilfe relevant, die nicht mit einem grauen Balken markiert sind.

1 Zahlenmengen

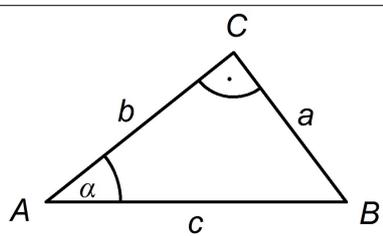
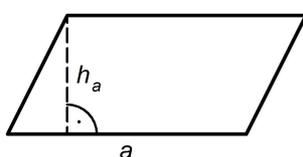
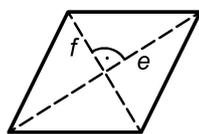
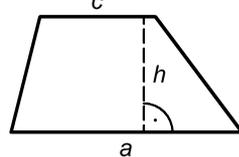
| | | |
|---|---|---|
| $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$ | Menge der natürlichen Zahlen | $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ |
| $\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$ | Menge der ganzen Zahlen | $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ |
| \mathbb{R} | Menge der reellen Zahlen | $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ |
| $\mathbb{R}_+ = \{x x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$ | Menge der nichtnegativen reellen Zahlen | $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ |

2 Geometrie

Ebene Figuren

A: Flächeninhalt

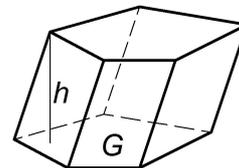
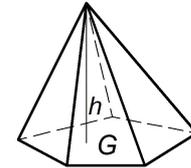
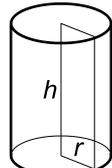
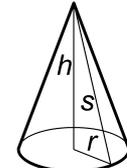
u: Umfang

| | | |
|---|--|---|
| Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$ | | |
| Rechtwinkliges Dreieck | | |
| Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$ | | |
| $\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$ | | |
|  | | |
| Parallelogramm $A = a \cdot h_a$  | Raute $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$  | Trapez $A = \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot h$  |
| Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ | | |

Körper

V: Volumen
O: Oberfläche

M: Mantelfläche
G: Grundfläche

| | |
|---|--|
| Prisma $V = G \cdot h$  | Pyramide $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$  |
| Gerader Kreiszylinder $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$  | Gerader Kreiskegel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = \pi \cdot r \cdot s$  |
| Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ | |

3 Terme

Binomische Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

$$\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$$

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

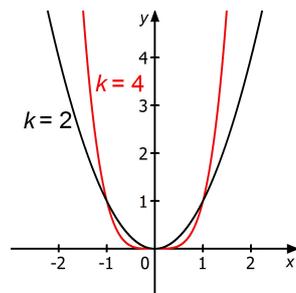
$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$a^0 = 1$$

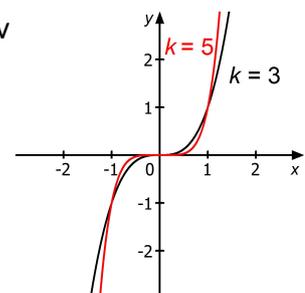
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

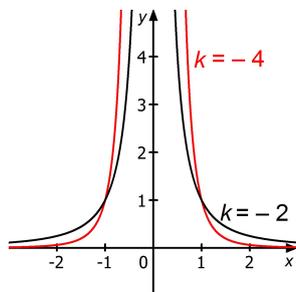
k gerade und positiv



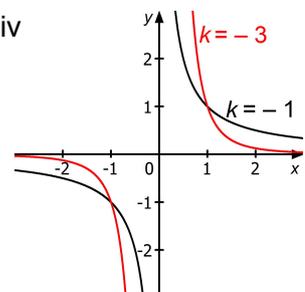
k ungerade und positiv



k gerade und negativ

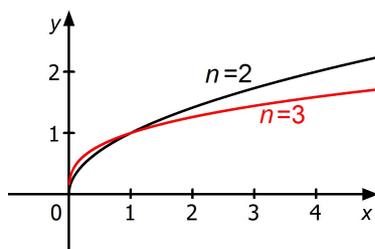


k ungerade und negativ



waagrechte Asymptote $y = 0$, senkrechte Asymptote $x = 0$

Wurzelfunktion mit $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$

$$\begin{array}{llll}
 x^n = a & a \geq 0 & \text{falls } n \text{ gerade} & x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{a} \\
 & & \text{falls } n \text{ ungerade} & x = \sqrt[n]{a} \\
 x^n = a & a < 0 & \text{falls } n \text{ ungerade} & x = -\sqrt[n]{|a|}
 \end{array}$$

Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$$f(x) = mx + b$$

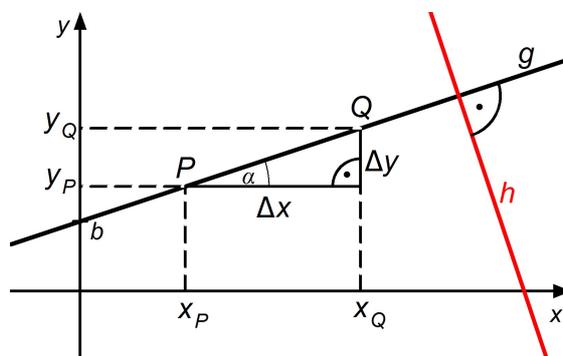
Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y -Achsenabschnitt b .

Steigung $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$

Punkt-Steigungs-Form $y = m(x - x_P) + y_P$

Steigungswinkel $m = \tan(\alpha)$

Orthogonalität $m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow g \perp h$



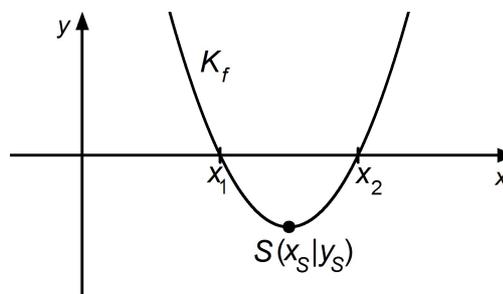
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Linearfaktorzerlegung $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S .

Scheitelform $y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{falls } b^2 - 4ac \geq 0$$

$$x^2 + px + q = 0 \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \quad \text{falls } \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$$

Polynomfunktion dritten Grades

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Polynomfunktion n-ten Grades

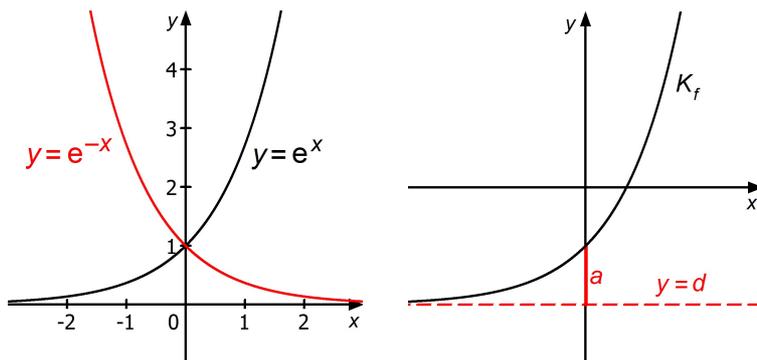
$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{mit Koeffizienten } a_i \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$$

Exponentialfunktion

$$f(x) = a \cdot q^x + d \text{ mit } a \neq 0; q > 0 \wedge q \neq 1$$

$$f(x) = a \cdot e^{bx} + d \text{ mit } a \neq 0; b \in \mathbb{R}^*$$

Asymptote $y = d$



Exponentialgleichung mit $q, y \in \mathbb{R}_+^*$

$$y = q^x \Leftrightarrow x = \log_q(y)$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

$$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$$

$$\log_q(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(q)}$$

$$e^{\ln(y)} = y$$

$$\ln(e^x) = x$$

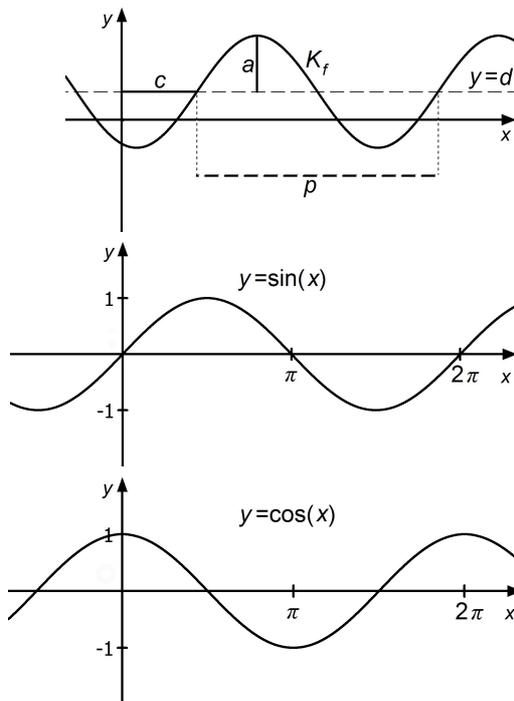
Trigonometrische Funktion

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d \text{ mit } a, b \neq 0$$

Amplitude $|a|$

$$\text{Periode } p = \frac{2\pi}{|b|}$$

| | | | | | |
|--------------|---|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|
| Bogenmaß x | 0 | $\frac{1}{6}\pi$ | $\frac{1}{4}\pi$ | $\frac{1}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}\pi$ |
| $\sin(x)$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | 1 |
| $\cos(x)$ | 1 | $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ | $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |



Abbildungen

Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung an der x -Achse $g(x) = -f(x)$

an der y -Achse $g(x) = f(-x)$

Streckung mit Faktor $\frac{1}{b}$ ($b > 0$) in x -Richtung $g(x) = f(b \cdot x)$

mit Faktor a ($a > 0$) in y -Richtung $g(x) = a \cdot f(x)$

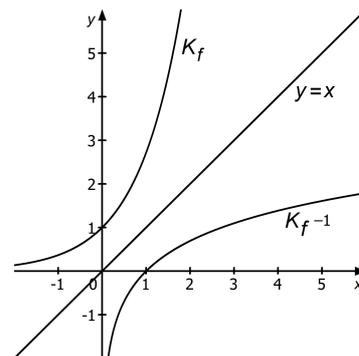
Verschiebung um c in x -Richtung $g(x) = f(x-c)$

um d in y -Richtung $g(x) = f(x) + d$

Umkehrfunktion

Ist eine Funktion f auf einem Intervall streng monoton (wachsend oder fallend), so ist f auf diesem Intervall umkehrbar.

Das Schaubild der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von f an der ersten Winkelhalbierenden.



5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0; x_1]$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Momentane / Lokale Änderungsrate (Ableitung) an der Stelle x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Ableitungsregeln

Summenregel $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Faktorregel $f(x) = a \cdot u(x) \Rightarrow f'(x) = a \cdot u'(x)$

Kettenregel $f(x) = u(v(x)) \Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Produktregel $f(x) = u(x) \cdot v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

| | | |
|-------------------|-----------------------------|---|
| $f(x) = x^k$ | $f'(x) = k \cdot x^{k-1}$ | $F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$ mit $k \neq -1$ |
| $f(x) = e^{bx}$ | $f'(x) = b \cdot e^{bx}$ | $F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \sin(bx)$ | $f'(x) = b \cdot \cos(bx)$ | $F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$ |
| $f(x) = \cos(bx)$ | $f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$ | $F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$ mit $b \in \mathbb{R}^*$ |

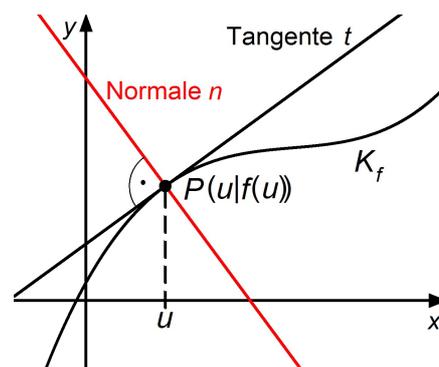
Tangente und Normale

Tangentensteigung $m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $y = f'(u)(x-u) + f(u)$

Normalensteigung $m_n = \frac{-1}{f'(u)}$

Normalengleichung $y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

| | | |
|------------|---|--|
| Symmetrie | K_f ist symmetrisch zur y -Achse K_f ist symmetrisch zum Ursprung | $f(-x) = f(x)$ für alle x $f(-x) = -f(x)$ für alle x |
| Monotonie | f steigt monoton im Intervall J f fällt monoton im Intervall J | $f'(x) \geq 0$ im Intervall J $f'(x) \leq 0$ im Intervall J |
| Krümmung | K_f ist im Intervall J linksgekrümmt K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt | $f''(x) \geq 0$ im Intervall J $f''(x) \leq 0$ im Intervall J |
| Hochpunkt | K_f hat den Hochpunkt $H(x_0 f(x_0))$ | $f'(x_0) = 0$ und VZW +/- von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) < 0$ |
| Tiefpunkt | K_f hat den Tiefpunkt $T(x_0 f(x_0))$ | $f'(x_0) = 0$ und VZW -/+ von $f'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) > 0$ |
| Wendepunkt | K_f hat den Wendepunkt $W(x_0 f(x_0))$ | $f''(x_0) = 0$ und VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0$ |

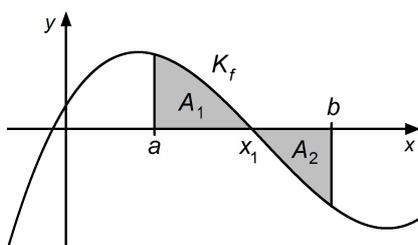
Berechnung bestimmter Integrale

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a), \text{ wobei } F \text{ eine Stammfunktion von } f \text{ ist.}$$

Flächenberechnung

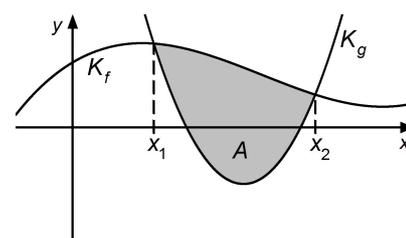
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x) dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^b f(x) dx$$



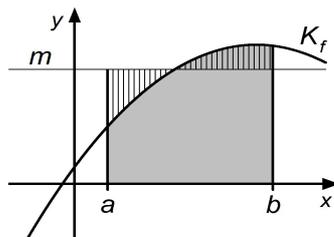
$$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) dx$$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



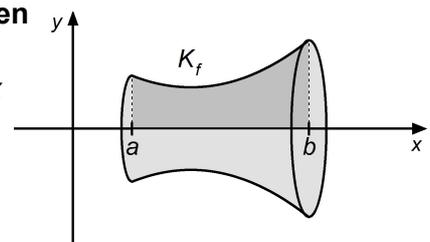
Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Rotationsvolumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

6 Stochastik

Relative Häufigkeit $h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit der } i\text{-ten Merkmalsausprägung}}{\text{Stichprobenumfang } n}$

Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n}{n}$

Ereignis Teilmenge der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments

Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A $0 \leq P(A) \leq 1$ $P(S) = 1$

Gegenereignis \bar{A} $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Laplace-Experiment Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) gleich wahrscheinlich sind

Laplace-Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Zusammengesetzte Ereignisse

Additionssatz $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A) \cdot P_A(B) = P(A \cap B)$

A und B stochastisch unabhängig $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Urnenmodelle

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Objekten wird k -mal gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen

- mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge n^k
- ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-k)!}$
- ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (d. h. mit einem Griff) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$

Erwartungswert $E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \dots + x_n \cdot P(X=x_n)$

Varianz $Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \dots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$

Standardabweichung $\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Binomialverteilung

Zahl der Versuche n , Trefferzahl k , Trefferwahrscheinlichkeit p

Wahrscheinlichkeit $P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=k)$

Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Sigma-Regeln

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$

$P(\mu - 1,64\sigma \leq X \leq \mu + 1,64\sigma) \approx 90,0\%$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$

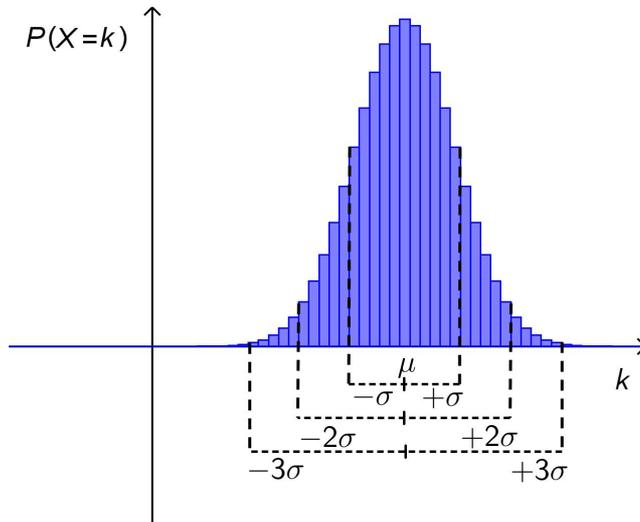
$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 95,0\%$

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$

$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 99,0\%$

Diese Näherungen sind besser, wenn der Stichprobenumfang n größer ist.

Nach einer Faustregel gelten sie für $\sigma > 3$ als brauchbar.



Vertrauensintervall

Näherungsweise bestimmtes Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p

$\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}; h + c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}} \right]$ mit $h = \frac{X}{n}$

| | | | | |
|------------------------------|------|------|------|--------|
| Vertrauenswahrscheinlichkeit | 90 % | 95 % | 99 % | 99,9 % |
| c | 1,64 | 1,96 | 2,58 | 3,29 |

Das Vertrauensintervall hat höchstens die Länge l , wenn für den Stichprobenumfang n gilt $n \geq \frac{c^2}{l^2}$.

Statistische Tests

Mögliche Fehler beim Testen einer Hypothese H_0

| | | |
|----------------------------|-----------------------|-----------------------|
| | H_0 ist wahr | H_0 ist falsch |
| H_0 wird verworfen | Fehler 1. Art | richtige Entscheidung |
| H_0 wird nicht verworfen | richtige Entscheidung | Fehler 2. Art |

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die größtmögliche Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen.

Einseitiger Signifikanztest

| | Nullhypothese H_0 | Gegenhypothese H_1 | Kriterium | Ablehnungsbereich |
|--------------|---------------------|----------------------|---------------------------|----------------------|
| linksseitig | $H_0 : p \geq p_0$ | $H_1 : p < p_0$ | $P(X \leq g) \leq \alpha$ | $\{0; 1; \dots; g\}$ |
| rechtsseitig | $H_0 : p \leq p_0$ | $H_1 : p > p_0$ | $P(X \geq g) \leq \alpha$ | $\{g; \dots; n\}$ |

7 Vektorgeometrie

Betrag eines Vektors $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Einheitsvektor $\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$

Länge der Strecke AB $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

Mittelpunkt M einer Strecke AB $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\cos(\varphi) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

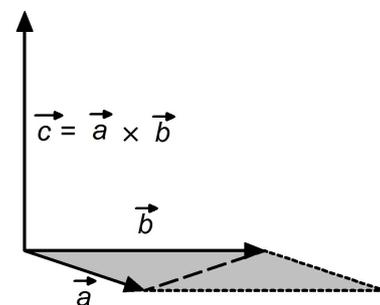
Orthogonalität $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ mit $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$

Vektorprodukt $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$
mit \vec{a} und \vec{b} keine Vielfachen voneinander

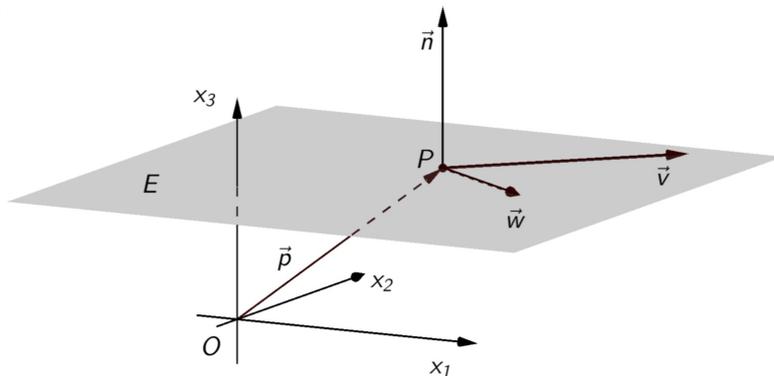
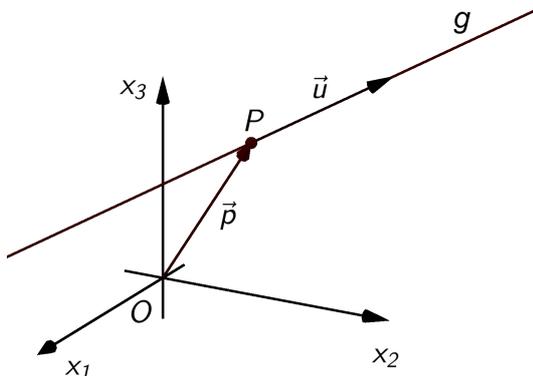
Flächeninhalt eines Parallelogramms $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$

Flächeninhalt eines Dreiecks $A = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$



Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, Richtungsvektor \vec{u} , Spannvektoren \vec{v}, \vec{w} und Normalenvektor \vec{n}



Parameterform $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$

Normalenform

Koordinatenform

$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$

$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$ mit $b \in \mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$$

zwischen Gerade und Ebene

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

zwischen zwei Ebenen

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Abstand

zwischen Punkt A und Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$

$$d = \left| \frac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

zwischen Punkt A und Ebene $E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$

$$d = \left| \frac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}} \right|$$

zwischen zwei windschiefen Geraden

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

$$d = \left| \frac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|$$

8 Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen \mathbf{A} und \mathbf{B} können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von \mathbf{A} mit der Zeilenanzahl von \mathbf{B} übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$

Einheitsmatrix

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix \mathbf{A} und ihre Inverse \mathbf{A}^{-1} gilt: $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix \mathbf{A} gilt: $\mathbf{A}^n = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

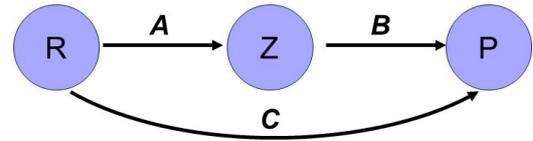
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix **A**

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix **B**

Rohstoff-Endprodukt-Matrix **C**



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe \vec{r} , Zwischenprodukte \vec{z} , Endprodukte \vec{p}

$$\vec{r} = \mathbf{A} \cdot \vec{z} \quad \vec{z} = \mathbf{B} \cdot \vec{p} \quad \vec{r} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \vec{p} = \mathbf{C} \cdot \vec{p}$$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten \vec{k}_R , Fertigungskosten der Zwischenprodukte \vec{k}_Z ,

Fertigungskosten der Endprodukte \vec{k}_P

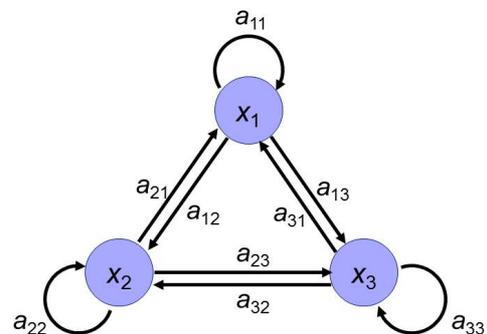
variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\vec{k}_V = \vec{k}_R \cdot \mathbf{C} + \vec{k}_Z \cdot \mathbf{B} + \vec{k}_P$

Gesamtkosten $K = \vec{k}_V \cdot \vec{p} + K_{fix}$

Übergangsprozesse

Übergangsmatrix zum nebenstehenden Übergangsgraph

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix

alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Aus Verteilung \vec{x} wird Verteilung \vec{y} $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \mathbf{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$

Stabilitätsvektor \vec{x} $\mathbf{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Zyklischer Prozess $\mathbf{A}^k = \mathbf{E}$ für ein $k > 1$

Leontief-Modell

Input-Output-Matrix

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

wobei x_{ij} die Lieferung des Sektors i an den Sektor j darstellt.

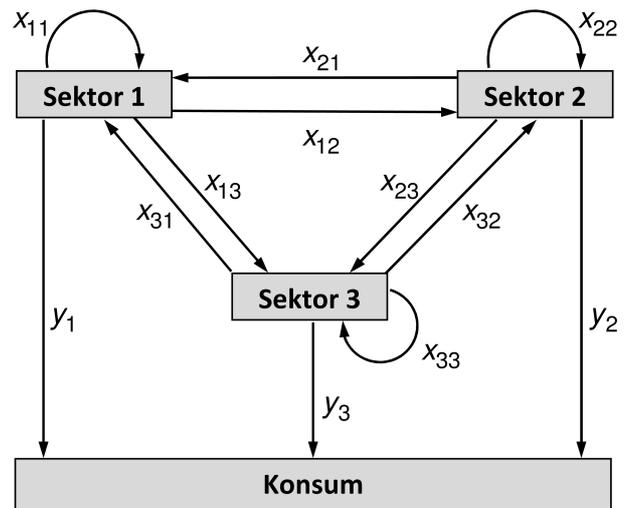
Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Konsumvektor $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Technologiematrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$

Es gilt: $(\mathbf{E} - \mathbf{A}) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Interner Verbrauch $\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{x}$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.