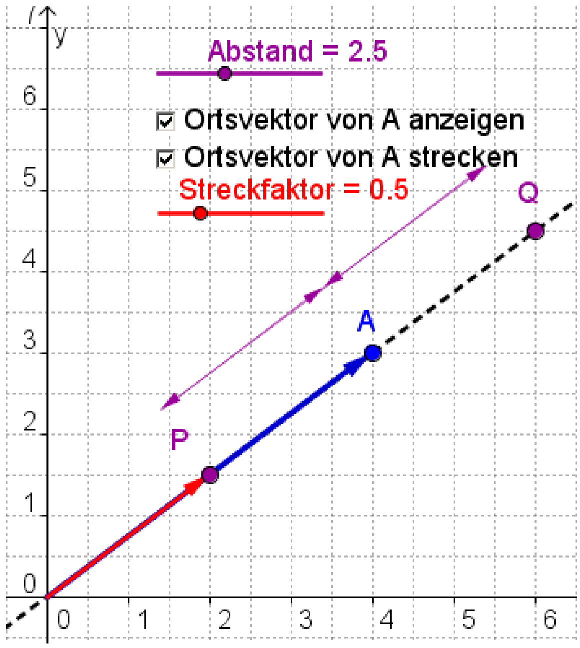
Aufgabe zum Abstand von Vektoren

Bestimme rechnerisch zum Punkt $A=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ die Koordinaten der Punkte *P* und *Q*, die zu *A* den Abstand 2,5 Längeneinheiten besitzen und mit *A* auf einer gemeinsamen Ursprungsgeraden liegen.



Aus den Erkenntnissen der Animation [1] vermuten wir, als Ergebnis $P=\begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}6\\4{,}5\end{pmatrix}$ (siehe Skizze rechts).

Lösung:

Der Ortsvektor von *P* geht aus dem Ortsvektor von *A* durch Streckung mit einem Streckfaktor $k_P<1$ hervor. Bei Q muss die Ungleichung $k_Q>1$ gelten.

Berechnet man die Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{PA}$ bei einem gegebenen Abstand, erhält man eine Gleichung, die beim Auflösen auf die Streckfaktoren k_P und k_Q führt.

Ansatz:

$$\vec{A}=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix};\quad \vec{P}=k_P\cdot\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}\rightarrow\overrightarrow{PA}=\begin{pmatrix}4-4k_P\\3-3k_P\end{pmatrix}\text{ mit }\left|\overrightarrow{PA}\right|\overset{!}{=}2{,}5$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{(4-4k_P)^2+(3-3k_P)^2} &= 2{,}5\\
\sqrt{16\cdot(1-k_P)^2+9\cdot(1-k_P)^2} &= 2{,}5\\
5\cdot\sqrt{(1-k_P)^2} &= 2{,}5\\
\sqrt{(1-k_P)^2} &= 0{,}5\\
(1-k_P)^2 &= 0{,}25\\
(1-k_P) &= \pm 0{,}5
\end{aligned}$$

$\rightarrow k_P=0{,}5$ und $k_Q=1{,}5$. Dies führt zu den Punkten $P=\begin{pmatrix}2\\1{,}5\end{pmatrix}$ und $Q\begin{pmatrix}6\\4{,}5\end{pmatrix}$.

---

1 Die Internet-Adresse zu dieser Aufgabe lautet: http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/linalg/vec/abstand01_html