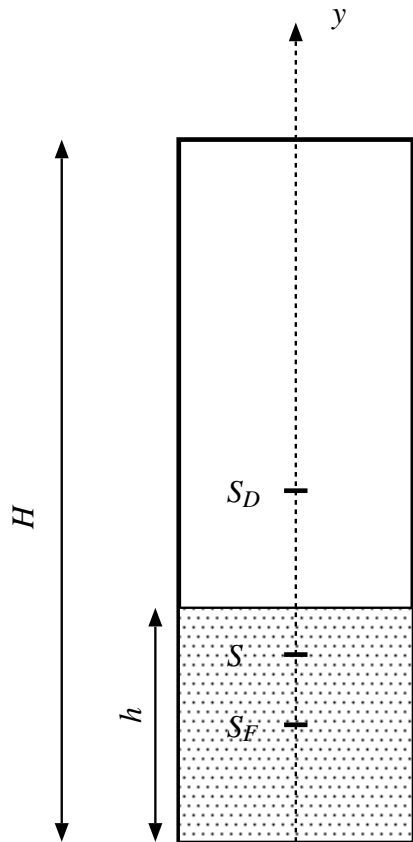


## Lösungsvorschlag zur standfesten Coladose



Variablenamen:

$m_D$	Masse der leeren Coladose
$H$	Höhe der Coladose
$S_D$	Schwerpunkt der leeren Dose
$S_F$	Schwerpunkt der Cola bei der Füllhöhe $h$
$S$	Gemeinsamer Schwerpunkt von Cola und Dose
$\rho$	Dichte der Cola
$A$	Querschnittsfläche der Coladose
$m_F = \rho Ah$	Masse der Colaflüssigkeit, wenn die Dose bis zur Höhe $h$ gefüllt ist.
$M_F = \rho AH$	Masse der Colaflüssigkeit, wenn die Dose ganz gefüllt ist.
$y_S$	Lage des momentanen gesamten Schwerpunktes

Für die Lage des momentanen Schwerpunktes gilt  $y_S = \frac{m_D \cdot \frac{H}{2} + m_F \cdot \frac{h}{2}}{m_D + m_F}$ .

Die Coladose bleibt dann am sichersten stehen, wenn der gesamte Schwerpunkt am tiefsten liegt.

- Lösung mithilfe der Analysis:

Leitet man die Funktion  $y_S(h)$  nach  $h$  ab und bestimmt die Nullstelle der Ableitung, dann erhält man folgenden Term für die Höhe der Cola bei tiefstem Schwerpunkt:

$$h = \frac{-m_D + \sqrt{m_D^2 + \rho A m_D H}}{\rho A} \stackrel{(\rho A = \frac{M_F}{H})}{=} \frac{m_D \left( \sqrt{1 + \frac{M_F}{m_D}} - 1 \right)}{\frac{M_F}{H}} = \frac{m_D}{M_F} \left( \sqrt{1 + \frac{M_F}{m_D}} - 1 \right) H$$

- Lösung ohne Analysis:

Wenn der Gesamtschwerpunkt genau im Flüssigkeitsspiegel liegt, dann hat er seine tiefste Lage. Dies können wir uns mit folgendem Gedankenexperiment klar machen:

Die leere Dose hat ihren Schwerpunkt in halber Dosenhöhe ( $\frac{H}{2}$ ). Steigt nun der Colaspiegel an, dann sinkt der Gesamtschwerpunkt von  $\frac{H}{2}$  auf einen Minimalwert und kommt bei gefüllter Dose schließlich wieder bei  $\frac{H}{2}$  an. Irgendwann liegt also der Gesamtschwerpunkt genau im Colaspiegel.

Durch wundersame Kräfte soll es uns möglich sein, genau in diesem Moment die Cola erstarren zu lassen. Wir könnten jetzt an der Grenze zwischen Cola und Luftraum die Dose auf einer Schneide ausbalancieren. Auf der linken Seite soll die Cola und auf der rechten Seite die Luft in der Dose sein. Fügen wir nur eine dünne Scheibe starrer Cola zu, dann verlagert sich der Gesamtschwerpunkt nach rechts in Richtung Dosenmitte. Also liegt der tiefste Gesamtschwerpunkt genau im Colaspiegel.

Damit kann jene Höhe der Cola ermittelt werden, bei welcher der Gesamtschwerpunkt am tiefsten liegt:

$h = \frac{m_D \cdot \frac{H}{2} + m_F \cdot \frac{h}{2}}{m_D + m_F}$  liefert dasselbe Ergebnis wie die Berechnung mithilfe der Analysis.

**Beispiel:**

$M_F = 300$  g und  $m_D = 100$  g,  $h \approx 0,33 \cdot H$ . Wir müssten also  $\frac{2}{3}$  aus der Coladose trinken, damit diese Dose das beste Standvermögen hat.

*Folgende Schüler haben brauchbare Lösungen eingereicht*

*Florentin Reiter, Jahrgangsstufe 12, Kolleg St. Sebastian, Stegen*

*Michael Herzog, Jahrgangsstufe 12, Gymnasium Achern, Achern*

*Andreas Buck, Klasse 9B, Kant-Gymnasium, Weil am Rhein*

*Annette K. Mittenberger, Klasse 9B, Klettgau-Gymnasium, Tiengen*

*Paul Lemmer, Jahrgangsstufe 13, Albert-Schweitzer-Gymnasium, Crailsheim*