II. 4.3 Förderung bei Schwierigkeiten in Mathematik

II. 4.3.1 Förderangebote bei Schwierigkeiten von Grundschulkindern in Mathematik

Multifaktorielle Ursachen für Rechenschwäche

Begriffe wie Rechenschwäche verführen häufig zu einseitigen Sichtweisen, die meist ausschließlich vom Kind ausgehen und/oder den Unterricht selbst nachrangig sehen lassen. Vielmehr müssen grundlegend auch die individuelle Lebenslage des Kindes und der in unsere Zuständigkeit und Verantwortlichkeit fallende Lernprozess sowie die Lernbedingungen im aktuellen Unterricht beachtet werden. Es ist bei der Rechenschwäche somit immer von mehreren Ursachen auszugehen, die sich teilweise gegenseitig bedingen und das Phänomen selbst nicht eindeutig zuordnen lassen.

Was Kinder für die Mathematik in die Schule mitbringen

Entsprechend den jeweiligen familiären Bedingungen, Lebensverhältnissen sowie dem kulturellen Hintergrund bringen Kinder ihre individuellen Vorerfahrungen in die Schule mit, auf denen die Lehrkräfte aufbauen können. Oft können die Kinder bereits ordnen, vergleichen, teilen, kleine Mengen simultan erfassen, zählen, - einige schon bis 100 -, usw.

Während Kinder in früheren Jahren durch ihre Erfahrungen
- auf der Straße, in Feld, Wiese und Wald (Reihung/Streuung, Grenzen, Entfernungen...),
- den Einbezug in Alltagsaufgaben (einkaufen, Tisch decken, Hilfsdienste im Hausgarten),
- mit wenig vorgefertigtem Spielzeug (Puppenkleider/Puppenstube selber herstellen),
- mit Kinderspielen / Bewegungsliedern

eine Fülle notwendiger Voraussetzungen für mathematische Begriffsbildungen in die Schule mitbrachten, sind diese heute durch einen Verlust der genannten natürlichen Erfahrungsräume sowie

durch veränderte Lebensbedingungen entweder deutlich reduziert und/oder sehr unterschiedlich. Diese veränderten Lebensbedingungen vieler Kinder bewirken eine verringerte Eigenaktivität.
Eigenaktivität ist aber Voraussetzung für das Erwachen des Neugierverhaltens der Kinder, der Lust am Experimentieren oder der Entwicklung von Phantasie und Kreativität. Mit der Entwicklung dieser Bereiche werden gleichzeitig die Grundlagen für den Aufbau räumlicher Vorstellungen und der Entwicklung von Vorstellungsbildern gelegt, die zum mathematischen Denken gehören.
Wenn diese grundlegenden Erfahrungen noch fehlen, hat die Grundschule dies im Unterricht zu berücksichtigen (Riek,1999).

Die Schulung basaler Grundfähigkeiten zur Optimierung der Lernvoraussetzungen

Basale Funktionen (Sinnestätigkeiten) werden oft als Voraussetzungen für das Erlangen der Entwicklungsstufe des mathematischen Denkens gesehen (Milz, 1994).
Gerade beim fachübergreifenden Lernen steht das Lernen mit allen Sinnen im Vordergrund. So ist es möglich, durch mathematische Lernprozesse (Handeln und Denken, Denken und Handeln) Entwicklungsimpulse für die Sensomotorik, die Wahrnehmung und die Sinnestätigkeit zu geben, wie auch umgekehrt. Beispielsweise vernetzt sprachbegleitendes Handeln im Mathematikunterricht die oben genannten basalen Funktionen oder können Platzwechselspiele im Sport die Basisfunktion der Raumorientierung schulen.

fächerberbindendes Arbeiten

In der Grundschule ist fächerverbindendes Arbeiten durchgängiges Prinzip des Unterrichts. Der ganzheitliche, auf die Persönlichkeit des Kindes ausgerichtete Erziehungs- und Bildungsauftrag der Schule wird durch die fächerverbindenden Themen betont (Bildungsplan für die Grundschule, 1994). Im Folgenden sollen deshalb Fördermöglichkeiten aufgezeigt werden, die im Unterricht der Grundschule nicht nur auf das Fach Mathematik bezogen sind. So können unter fächerübergreifendem Aspekt besonders die Fächer des musisch-ästhetischen Gegenstandbereiches, aber auch die Fächer Deutsch und HuS zur Förderung der basalen und gleichzeitig mathematischen Fähigkeiten beitragen. Der Gedanke, dass Mathematik mit Bewegung und Handlung untrennbar verbunden ist, wird häufig zu wenig beachtet. So sollte bei der Verteilung der Lehraufträge selbst im Anfangsunterricht das Fach Mathematik sowie Musik/Sport/ BK/ TW nicht vom Klassenlehrerauftrag abgetrennt werden.

Anregungen für die Praxis zur Schulung der Basisfunktionen einzelner Funktionsbereiche

Möglichkeiten der Schulung von Basisfunktionen:

- Faltarbeiten:

Dabei werden Feinmotorik und die Augen-Hand-Koordination geschult. Gleichzeitig machen die Kinder auch Erfahrungen mit Linien, Flächen, Seiten, Drehungen, Spiegelungen. Das räumliche Vorstellungsvermögen wird gefördert.

- Sprechverse, Bewegungslieder, Pausenverse:

Sie ermöglichen den Kindern vielfältige Bewegungserfahrungen, die für räumliches Denken notwendig sind.

- Tänze:

In vielen Tänzen gehen wir nach vorn, zurück, zur Seite, nach rechts und links. Die Förderung der Richtungsorientierung steht dabei im Vordergrund.

- Tastspiele, Kimspiele:

Kneten und Formen, Knoten und Knüpfen, Sticken und Wirken, Drucken (Formauffassung, Parkettierung und Musterbildung), Bildbetrachtungen (Figurgrundwahrnehmung, Wahrnehmungkonstanz) Farben und Form (Sehverstehen schulen)

- Echospiele, Bewegungslieder(Überkreuzen der Körpermittellinie), Rhythmen und Reime

- Farbspuren mit Händen und Füßen

- Auf Körperteilen Lasten tragen

- Verhüllen, Verkleiden mit Stoffen und Materialien

- Den eigenen Körper in verschiedenen Raumlagen erleben: Sprossenwand, Kletterstange, Trampolin, schiefe Ebenen, Barren etc.

Die meisten dieser Anregungen werden in der Grundschule bereits praktisch umgesetzt. Wichtig ist es, diese Aktivitäten zur Förderung von Kindern mit Schwierigkeiten in Mathematik aufzugreifen und bewusst zu machen.

„zählendes Rechnen“

„Legt man sogenannten rechenschwachen Kindern verschiedene Aufgaben vor, findet man in ihrem Vorgehen bei der Lösung und ihrer Erklärung und Begründung der Lösung viele Unterschiede. Fast alle Kinder halten jedoch am zählenden Rechnen mit Hilfe der Finger bis in die dritte und vierte Grundschulklasse fest. Warum? Welchen Stellenwert hat dieses Rechnen in der Entwicklung des mathematischen Verständnisses? Welches Zahlverständnis und welches Verständnis vom Rechnen liegen dem Vorgehen des Kindes zu Grunde? Welche Schritte und Wege führen zur Ablösung vom zählenden Rechnen? Diese Fragen zielen wahrscheinlich auf den Kern des Problems vieler „rechenschwacher Kinder“.
(Gerster / Schultz, 1998).

Zählkompetenz ist keinesfalls nur ein Ausdruck für mechanisches Memorieren. Weil im Zählen schon mathematische Kompetenzen enthalten sind, ist Zählen ein möglicher Ausgangspunkt für komplexe mathematische Konstruktionen (Zahlbegriff, Addition, Subtraktion u.a.). Zählen kann als „Vorstufe der kognitiven Genese des Zahlbegriffs“ betrachtet werden (Schmidt, 1983).

Um Schwierigkeiten zu vermeiden, ist es schon im Anfangsunterricht wichtig, weitere Rechenstrategien zu entwickeln. Mit Zählstrategien können die Kinder im Zahlenraum bis 20 noch einigermaßen rechnen, aber im zweiten Schuljahr ist das unzureichend. Deshalb zeigen sich bei „Zählern“ ab dem zweiten Schuljahr oft große Probleme, deren Ursachen aber bereits im ersten Schuljahr liegen.

Rechenstrategien entwickeln

Nach Gerster (1995) hat das zählende Rechnen negative Folgen: Die Schülerinnen und Schüler gewinnen keine strukturellen Einsichten und Vorstellungen über Zahlbeziehungen und Rechenoperationen. Sie verstehen nicht, dass die Zahl aus Einheiten zusammengesetzt ist und selbst eine Einheit bildet (Integration der Seriation und Klassifikation). Die Einsicht in die Zehner-Einer-Struktur, Verdoppeln und Halbieren
u. a. gelingt nicht, Basisfakten wie 2 + 3 können nicht abgerufen werden, Ableitungsstrategien sind nicht verfügbar, z. B. 7 + 2 = 9, 37 + 2 = 39, 7 X 6 = 42, 5 X 6 + 2 X 6 = 42.

Folgen des zählenden Rechnens

Zu den Ursachen für die Beibehaltung des zählenden Rechnens gehören Schwierigkeiten bei der gegliederten Mengenwahrnehmung durch unzureichende Vorstellungsbilder über Zahlen und Rechenoperationen und mangelhafte Vernetzung von Basisfakten (Gerster 1995).
Eine Aufgabe wie 56 + 23 kann man zählend lösen, wenn man in Einer- oder Zehner- und Einerschritten vorwärts zählt (56, 66,76, 78, 79). Diese Lösung erfordert hohe Konzentration und gute Merkfähigkeit. Deshalb erleichtern sich manche Kinder das Weiterzählen durch Fingerrechnen. Ein Verständnis von Anzahlen brauchen sie dabei nicht. (Mächtigkeit der Zahlen, Zehner-Einer-Struktur).
Fehler kann es geben, weil die Rolle des Anfangs- und Endgliedes der Zählsequenz unklar ist. „Bei 5+3 zählt man `sechs, sieben, acht` und nennt das letztgenannt Zählwort als Ergebnis. Bei 8-3 zählt man `sieben, sechs, fünf` und nennt das letztgenannte Zählwort als Er-

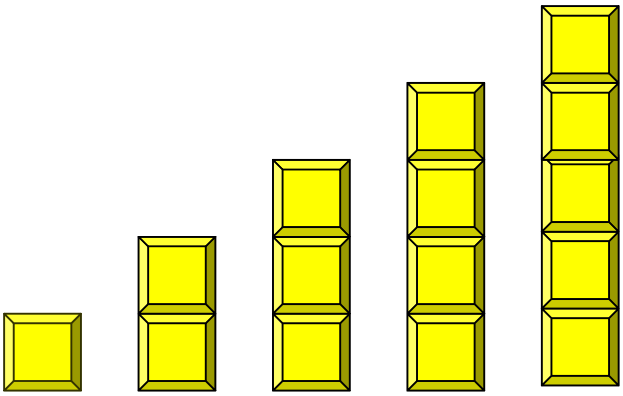
Ursachen des zählenden Rechnens

gebnis“. Beide Prozeduren können sich gegenseitig stören. „ Man beginnt die Zählprozedur bei 8, zählt um 3 zurück und nennt das letztgenannte Zählwort (6) als (falsches) Ergebnis oder man zählt `sieben, sechs, fünf` und nennt die nächst kleinere Zahl vier als (falsches) Ergebnis“ (Gerster / Schultz 1998). Ohne die Darstellung der Mächtigkeit wird manchen Kindern nicht klar, ob bei 5+3 alle vier Zahlen (5,6,7,8) oder nur die beiden dazwischenliegenden (6,7) oder drei Zahlen relevant sind (5,6,7 oder 6,7,8).

Materialien wider das zählende Rechnen:

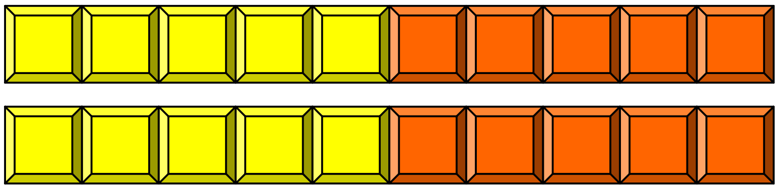
- Zahlbilder

Durch die Arbeit mit Zahlbildern bauen die Kinder alternative Strategien zum zählenden Rechnen auf. Das simultane Erfassen solcher Bilder schafft einen kreativen, beweglichen Zugang zu den Zahlen. Bei linearer, ungegliederter Anordnung gleichartiger Dinge liegt die Grenze der simultanen Erfahrbarkeit etwa bei 5. Darin steckt „die Kraft der 5“ gerade für Kinder mit Schwierigkeiten bei der Mengenauffassung (Nestle, 2000).



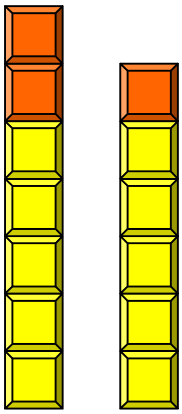
-Zwanzigerstreifen

Der **„**Zwanzigerstreifen“(mit 20er Mengen viel mehr als mit 10er Mengen) untergliedert durch die 5 bietet die Möglichkeit vielerlei Übungen zu Mengen-, Form- und Zahlerfahrungen. Die Vorstellung von Mengen kann damit entscheidend weiterentwickelt werden und bildet die Grundlage für Rechenkompetenzen. Dabei sollte der Streifen auch vertikal eingesetzt werden.
Durch einfaches Abdecken (Blitzrechnen) können die Simultanerfassung von Mengen, als auch Zerlegungs- und Ergänzungsaufgaben anschaulich geübt werden.



Mit diesem Arbeitsmittel kann der schwache Rechner durch das Einprägen der Zahlenbilder von 1 bis 5 das kleine 1+1 und 1-1 im ZR anschaulich lernen.

Beispiel:



6 + 7 =

Hier wird mit Hilfe der „Kraft der 5“ die Rechenstrategie:5 + 5 + 2 + 1 gefördert. Wesentlich trägt dazu die Simultanerfassung der Zahlen von 1-5 bei.

Dieses Material lässt sich leicht in den Zahlenraum bis Hundert erweitern (vgl. Dienes- Blöcke, Hundertertafel in Punkteform).

Materialien zur Entwicklung von mathematischen Vorstellungen:

Materialien zur Beurteilung von Veranschaulichungsmitteln im arithmetischen Anfangsunterricht unterliegen einer Vielzahl von Kriterien. Für Kinder mit Schwierigkeiten stehen folgende didaktische Gesichtspunkte im Vordergrund:

- Erlaubt das Material eine zählende Zahlauffassung?
- Erlaubt das Material quasi-simultane Zahlauffassungen im Zahlenraum bis 20 (oder 100) ?
- Unterstützt das Material die Ablösung vom zählenden Rechnen?
- Erlaubt das Material operative Handlungen?
- Erlaubt das Material unterschiedliche, vom Kind selbst entwickelte Lösungswege ?

- Existiert für das Material eine Fortsetzung in größeren Zahlenräumen (100 oder 1000)?
- Gibt es zu dem Material passendes Demonstrationsmaterial?
- Sind die mit dem Material durchgeführten Handlungen leicht bildlich (ikonisch) darstellbar?
- Ist das Material auch für andere Inhalte des Mathematikunterrichts verwendbar?

Die Grenzen eines homogenen Materials ohne weitere Struktur (wie z.B. Streichhölzer, Perlen, Stäbchen usw.) sieht Floer (1993) darin, dass auch die Zahlvorstellung unstrukturiert bleibt. Erst die räumliche Anordnung der Objekte kann eine Struktur schaffen.
„Wichtig für die Kinder ist es, dass die eingesetzten Anschauungsmittel im Unterricht eingeführt und damit gearbeitet worden ist. Für rechenschwache Kinder ist daher die Verwendung strukturgleicher Materialien, günstigerweise jedoch nur eines Veranschaulichungsmittels, notwendig“ (Radatz / Lorenz 1993).

- Hundertertafel

Nach Floer (1993) ist nur die Hundertertafel gut geeignet, die aus 100 Würfeln besteht, die so gedreht werden können, dass eine rote oder eine blaue Fläche (ohne Zahlen) zu sehen ist.
Die einzelnen Würfel können gerade bei rechenschwachen Kindern als Fingerersatz zum Zählen verwendet werden, wodurch sie ihre strukturierende Kraft verlieren.
Bestimmte Aufgabentypen lassen sich bei Hundertertafeln mit Ziffernbezeichnung nicht lösen, wie z.B.: Wird 6+6 als Verdopplung untereinander gelegt (eine sehr sinnvolle Strategie), dann erscheint als Zahl auf dem letzten Würfel 16.
Hundertertafel und Hunderterfeld eigenen sich für eine Vielzahl von Übungen, für die Entwicklung der Vorstellungsbildern von Zahlzusammenhängen scheinen sie hingegen nicht optimal, wenn sie mit Ziffern besetzt sind.

Die Einerwürfel, Zehnerstangen, Hunderterplatten und Tausenderblöcke der Mehrsystemblöcke / Dienes – Blöcke sind konkret zum Begreifen gestaltet. Allerdings wird die Kraft der 5 vernachlässigt, deshalb empfiehlt es sich mit durchsichtigen Klebestreifen Fünferstangen aus Einerwürfeln anzufertigen, ebenso Fünfzigerplatten, um dem zählenden Rechnen entgegen zu wirken.

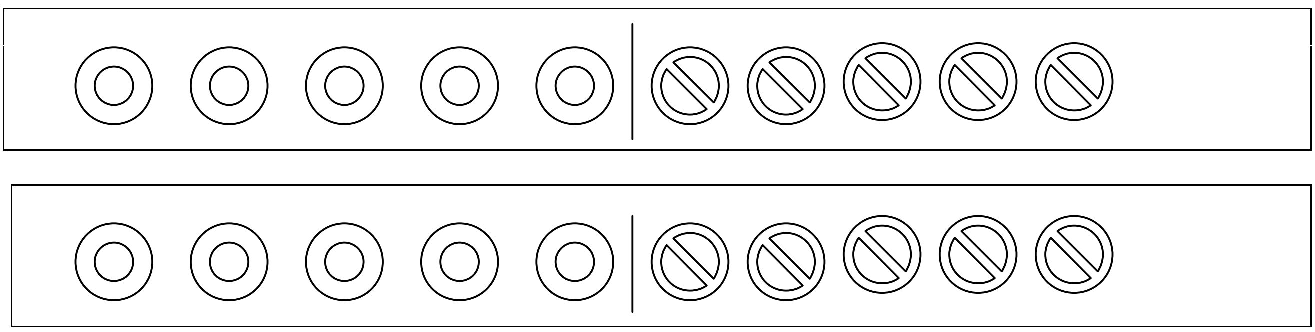
- *Mehrsystem blöcke*

Die gelegten Zahlen sind graphisch einfach übertragbar. Die Entwicklung des Verständnisses vom Bündelungsprinzip sowie der Stellenwerttafel wird unterstützt. Das Material ist schnell in graphische Repräsentationen zu übertragen und lässt sich sehr gut gedanklich vorstellen.
Dienes - Blöcke können sehr gut zusammen mit der Stellenwerttafel eingesetzt werden, um große Zahlen darzustellen und um die schriftlichen Rechenverfahren vorzubereiten.

Rechenblöcke mit Rechensteinen (vgl. Nestle, 2000) bestehen aus zehn Rechenblöcken mit hundert Rechensteinen.

- *Rechenblöcke mit Rechensteinen*

Jeder Rechenblock kann zehn Rechensteine aufnehmen. So können die Kinder leicht dekadische Analogien entdecken bzw. konstruieren.

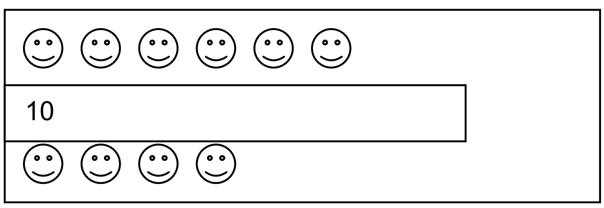


Die Rechensteine sind auf einer Seite angebohrt. Dadurch kann jede beliebige Menge strukturiert werden, z.B. der Zehner als zwei Fünfer.
Mit den Blöcken lassen sich Felder oder Reihen bis Hundert legen bzw. zusammenstecken. Der Zahlenraum kann sukzessive bis Hun-

dert aufgebaut werden.
In Reihen aufgebaut können Vorgänger und Nachfolger bestimmt werden und der ordinale Zahlaspekt betont werden. Mit den Rechenblöcken lassen sich alle Reihen des kleinen Einmaleins (Sprünge) darstellen. Zum Hunderterfeld gelegt steht der Kardinalzahlaspekt im Vordergrund. Da dieses Material strukturgleich mit der Zwanzigerreihe ist, lassen sich alle Zahlzerlegungen, Ergänzungs- und Zerlegungsaufgaben konstruktiv handelnd (operierend) erarbeiten.

- *Schütteldosen bzw. Zahlzerlegungskästchen*

Schütteldosen bzw. Zahlzerlegungskästchen eignen sich zur Sicherung der Zahlzerlegung im Zahlenraum bis 20. An den Zerlegungskästchen kann der Glasdeckel abgehoben werden, um so die Anzahl der Kugeln zu verändern. Das Kästchen hat einen eingebauten Mittelsteg (kleiner als die Länge des Kästchens). Das Kästchen wird geschüttelt. Anschließend wird die nun dargestellte Zerlegungsaufgabe verbalisiert und notiert. Durch mehrmaliges Schütteln können viele Zerlegungsaufgaben zu jeder Zahl gefunden werden.
Wird der Kasten mit einem Deckel versehen, der eine Teilmenge verdeckt, können weitere Platzhalter- und Ergänzungsaufgaben gerechnet werden.
Für die Kinder ist es eine Hilfe, wenn die Zahl auf dem Kasten angebracht wird (Aufkleber).
Dieses Arbeitsmittel ist besonders für selbstständiges Arbeiten geeignet.



Angebote der Beratung und Unterstützungssysteme:
Lehrerinnen / Lehrer und Erziehungsberechtigte sind gut beraten, wenn sie sich in der Einschätzung ihrer Kinder mit Problemen im Rechnen, aber auch begleitenden Schwierigkeiten zunächst die vorhandenen schulischen Unterstützungssysteme durch umfassende pädagogisch-psychologische Differentialdiagnostik, etwa mit Hilfe staatlich anerkannter Pädagoginnen /Pädagogen und Psychologinnen / Psychologen zu nutze machen.

Hilfen:

In drei Bereichen werden in unserem Schulwesen unterstützende Hilfen angeboten:
An der eigenen Schule sind neben der Mathematiklehrerin / dem-Mathematiklehrer sowie den Kolleginnen und Kollegen, die das betreffende Kind unterrichten, auch die Beratungslehrerin / der Beratungslehrer die ersten Ansprechpartner. Beobachtungen zu Stärken und Schwächen des Kindes in unterschiedlichsten Entwicklungs- und Lernbereichen und diesbezügliche Gespräche mit Eltern sind hierbei wichtige Anhaltspunkte.

- *Allgemeine Schule*

Eine weitere Hilfe stellt die Kooperation der allgemeinen Schule mit der Sonderschule dar, die eine intensive Elternarbeit einbezieht. Die Förderung von Kindern im Mathematikunterricht sind ureigenster Auftrag der allgemeinen Schule und erst in zweiter Linie Aufgabe von Sondereinrichtungen. Bewährt haben sich Gespräche am runden Tisch mit Eltern, bei denen die Sonderschullehrerin oder der Sonderschullehrer beratend bei der Förderplanung teilnimmt. Werden allerdings Mathematikprobleme zusätzlich von anderen Problemfeldern überlagert, so können auch außerschulische Hilfen einbezogen werden

- *Kooperation der allgemeinen Schule mit der Sonderschule*
- *außerschulische Hilfen*

Außerschulische Hilfen stellen jene Unterstützungssysteme dar, die Eltern und Lehrerinnen / Lehrer oft begleitend und ergänzend, wertvolle Hilfe anbieten können:

- Beratung durch eine Schulpsychologische Beratungsstelle
- Aufsuchen einer Erziehungsberatungsstelle
- Aufsuchen des allgemeinen Sozialen Dienstes
- Aufsuchen von Haus-, Kinder- oder Fachärztinnen – und -ärzten
- Abklärung bei einem Sozialpädiatrischen Zentrum
- Beratung durch eine Elternselbsthilfeorganisation

Vorgehen bei Rechenschwäche

Für die richtige Wahl der Beratungshilfe bei Kindern- und Jugendlichen mit Rechenschwäche gilt:
Zunächst sollte zur Abklärung des mathematischen Förderbedarfes die Klassenlehrerin / der Klassenlehrer bzw. die Mathematiklehrerin / der Mathematiklehrer einbezogen werden. Von großem Vorteil gegenüber anderen Institutionen ist in der Schule der Parameter „Zeit", denn gerade hier ist eine langfristige Beobachtung der Entwicklung der Rechenstrategien eines Kindes von ausschlaggebender Bedeutung.

Hilfsangebote, die auf eine sorgfältige und gründliche Schülerbeobachtung und Fehleranalyse verzichten, sind nicht empfehlenswert.

Susanne Meßmer, Konrektorin
Römerschule, 78628 Rottweil
Pädagogische Schwerpunkte: Regionale Lehrerfortbildung u.a. zum Thema Rechenschwäche
Klaus Diesmar, Sonderschulrektor
Hornenbergschule, 78194 Immendingen
Pädagogische Schwerpunkte: Regionale Lehrerfortbildung u.a. zum Thema Rechenschwäche
Dr. Jürgen Gössel, Dipl. Päd.
Schulamtsdirektor und stellv. Amtleiter am Staatlichen Schulamt Rottweil
Pädagogische Schwerpunkte: Beratung und Betreuung von Grund- und Sonderschulen, Tätigkeit in der Lehrerfortbildung

II. 4.3.2 Analyse und Behebungsmöglichkeiten von Fehlern bei schriftlichen Rechenverfahren und im Sachrechnen in den Klassen 3 und 4

Lernschwierigkeiten aus dem Unterricht heraus

Lernschwierigkeiten aufgrund kognitiver oder in der Persönlichkeit des Schülers bzw. der Schülerin liegender Defizite und Idiosynkrasien sollten bereits in der Eingangsstufe erkannt und mit Hilfe anderer Einrichtungen wie Schulpsychologe und Schulberatungsstellen angegangen und, wenn möglich, behoben worden sein. Je länger Lernprobleme aufgrund solcher Faktoren andauern, um so schwieriger ist es, sie zu therapieren, und um so ungünstiger ist ihre Prognose.

Möglichst frühzeitige Behebung spezifischer schülerzentrierter kognitiver Defizite

Allerdings treten im Laufe der Schulzeit immer wieder Lernprobleme auf, die eng mit dem Verständnis des Stoffes, d.h. mit den Besonderheiten der Rechenverfahren, der arithmetischen Begriffsbildung und der Lösungswege bei mathematischen Problemaufgaben verbunden sind. Sie sind nicht notwendig auf spezifische schülerzentrierte kognitive Defizite zurückzuführen. Sie können, überspitzt formuliert, als “didaktogen”, als durch das unglückliche Zusammentreffen einer bestimmten Veranschauungsart, einer bestimmten methodischen Vorgehensweise oder eines didaktischen Prinzips mit den Vorkenntnissen und Lernbesonderheiten eines individuellen Schülers bedingt charakterisiert werden.

Aus dem Unterricht entstehende Schwierigkeiten

Damit ist umgekehrt nicht gemeint, der Unterricht trage notwendig Schuld an dieser Form von Lernschwierigkeiten und hätte durch bessere Planung oder korrekteres, gar kleinschrittigeres Vorgehen vermieden werden können. Bei anderem Vorgehen wären hingegen wahrscheinlich andere Schüler oder Schülerinnen betroffen. Es existieren keine Veranschaulichungsmittel und keine Unterrichtsform, die für alle Kinder gleichmäßig und optimal passen.

Kein Unterricht ist für alle Kinder gleichermaßen optimal und passend.

Allerdings gehört es zu den Aufgaben des Lehrers bzw. der Lehrerin, die didaktogenen Lernschwierigkeiten möglichst früh zu erkennen und den sich anbahnenden Fehlvorstellungen eines einzelnen Kindes entgegenzuwirken. Und diese Aufgabe wiederum kann ihnen von außerschulischen Stellen nicht abgenommen werden, da hier ihre genuine Kompetenz liegt. Nur sie kennen ihren Unterricht und seine didaktisch-methodischen Besonderheiten, das verwendete Material, die vorangehenden Schritte im Lernprozess usf. Daher können sie am besten hier auftretenden Lernschwierigkeiten begegnen.

Didaktogene Lernschwierigkeiten erkennen und entgegenwirken

Auch in den Klassen 3 und 4 fallen die Schüler und Schülerinnen mit Lernproblemen dadurch auf, dass sie Fehler machen. Als oberste Regel gilt (cum grano salis):

> "Schülerfehler im Mathematikunterricht entstehen nur selten zufällig oder durch flüchtiges Verrechnen, ihnen liegt fast immer eine bestimmte Lösungsstrategie bzw. Rechenregel des Schülers zugrunde, die für den Schüler selber sinnvoll ist. Diese Fehlermuster wenden die Schüler bei gleichartigen Aufgaben durchweg systematisch und konsequent an." (Lorenz & Radatz, 1993, 59)

Fehlerhafte Lösungsstrategien als Ursprung der Schülerfehler

Über die schriftlichen Rechenverfahren und die Fehleranalyse

Im deutschen Mathematikunterricht wird, anders als in vielen anderen Ländern, sehr früh auf die Beherrschung der schriftlichen Rechenverfahren hingearbeitet. Dies geht häufig auf Kosten des zugrundeliegenden Verständnisses, insbesondere zu Lasten der Sachsituationen und der Materialhandlungen, aus denen sie entstehen. Die Rechenverfahren selbst stellen ja Verkürzungen, Schematisierungen dieser Handlungen dar. Zu schnell wird Mathematik aber auf die korrekte Handhabung eines Algorithmus verkürzt und dessen Beherrschung als "Verstehen" interpretiert.

Zu schnelle Beherrschung der schriftlichen Rechenverfahren auf Kosten des Verständnisses

Die Kehrseite liegt darin, dass Schüler und Schülerinnen häufig unter Mathematik eine Form von “Regelspiel” verstehen, das durchaus ohne Bezug zur Realität sein kein, ja dass sie Widersprüche zur Realität schlicht ignorieren: Mathematik sei eine eigene Welt und habe ihre eigenen Gesetze. Aufgaben in der Mathematik sind danach immer (eindeutig) lösbar, man braucht sie nur zu berechnen. Hierfür benötigt man die richtige Regel, eine ausgefeilte Rechentechnik bzw. einen Trick. Unterricht bestehe im wesentlichen darin, so glauben viele, diese Tricks und Kniffe zu lernen. Mit diesem instrumentellen Verständnis von Mathematik konstruieren sie sich dann ihre eigenen Rechenverfahren, wenn sie die zugrundeliegenden Handlungen nicht verstehen oder nicht mehr erinnern und der Algorithmus im Vordergrund steht. Diese Eigenkonstruktionen von Rechenverfahren, die häufig oberflächliche Korrekturen überdauern, sind in den oberen Klassen der Grundschule meist Ausgangspunkt von sich manifestierenden Lernschwierigkeiten. Die Stärke der richtig durchgeführten Verfahren, ihre universelle Anwendbarkeit und Durchführbarkeit aufgrund des immanenten blinden Automatismus, ist bei Fehlstrategien gerade ihre Krux: Sie sind korrekturresistent.

Mathematik als eine Form von Regelspiel ohne Bezug zur Realität

Eigenkonstruktionen von Rechenverfahren sind häufig Ausgangspunkt von sich manifestierenden Lernschwierigkeiten.

Daher kommt der Fehleranalyse der schriftlichen Rechenverfahren eine wesentliche Bedeutung zu (vgl. Gerster, 1982, 1984; Lörcher, 1984).

> “Die Fehleranalyse ist eine hilfreiche und praktikable Methode, die Lernschwierigkeiten einzelner Schüler beim Lösen von mathematischen Aufgaben zu erkennen. Schülerfehler und die ihnen zugrundeliegenden Strategien/Fehlermuster … bilden für die Lehrerin einen hilfreichen diagnostischen Informationshintergrund, um gezielt Förder- und Differenzierungsmaßnahmen einleiten zu können.” (Lorenz & Radatz, 1993, 59)

Fehleranalyse als diagnostischer Informationshintergrund

Zudem ermöglicht die Fehleranalyse dem Lehrer und der Lehrerin, ihren eigenen Unterricht kritisch zu überprüfen: Welche Fehlertypen treten gehäuft auf? Welche Fehlermuster beobachte ich nur bei einem oder wenigen Kindern? Sind mir diese Fehler aufgrund meines Unterrichts verständlich? (vgl. Gamper, 1983)

Fehler sind nützlich.

Fehler sind ein notwendig auftretendes Moment in jedem Lernprozess. Sie sind etwas durchaus Natürliches und Nützliches. Allerdings scheint der gängige Mathematikunterricht eher das Ziel zu haben, Schülerfehler auf jeden Fall zu vermeiden. Es grenzt schon an ein Sakrileg, ein falsches Ergebnis an der Tafel stehen zu lassen, bis die Schüler und Schülerinnen dies selbst bemerken. Damit kann der Unterricht die konstruktive Seite von Fehlern nicht aufnehmen: Über Fehler zu reden, Fehler einzusehen, um Verständnis zu befördern, selbst über fremde Fehler nachzudenken und damit die eigene Denkweise und das richtige Verfahren zu reflektieren.

Im Folgenden sollen einige typische, häufig auftretende Schülerstrategien bei den schriftlichen Rechenverfahren angegeben und mögliche Fördermaßnahmen benannt werden. Natürlich sind es nicht alle Fehllösungen, aber durchaus gängige, die im Schulalltag in fast jeder Klasse zu einem Zeitpunkt des Lernprozesses anzutreffen sind.

Prophylaxe:

Algorithmen möglichst spät einüben

Kontroll- und Überschlagsrechnungen betonen

Allerdings sind einige Fehlertypen an die Verfahren und die didaktischen Schritte selbst gebunden. Aus diesem Grunde gilt als generelle Prophylaxe, die Einübung der Algorithmen möglichst weit nach hinten zu schieben, soweit möglich und durchsetzbar leichtere Verfahren als die gegenwärtigen Normalverfahren (insbesondere für die Subtraktion) zu verwenden und dafür Kontroll- und Überschlagsrechnungen zu betonen.

Fehlermuster bei den schriftlichen Rechenverfahren und mögliche Hilfen

- Fehler bei der schriftlichen Addition

Beschreibung	Beispiel	Mögliche Hilfen
1. Fehler beim Einsundeins	17889 + 5403 23391	Wiederholung des Zahlenraumes bis 20, da dieser beim schriftlichen Verfahren nicht überschritten wird.
2. Multiplikative Verwendung der Null	17889 + 5403 23202	Übung mit der Null im Zahlenraum bis 20; Verdeutlichung mit konkretem Material
3. Fehler bei unterschiedlicher Stellenzahl	17889 +5403 71919	Wiederholung und Übung an der Stellenwerttafel; spaltenweise Zuordnung der E, Z, H, T
4. Addition von links	17889 + 5403 1.2.3.9.2.1	Bündelungsaufgaben; Diskrepanzaufgaben im überschaubaren Zahlenraum bis 20 (100)
5. Inverse Operation	17889 + 5403 12326	Sprachliche Betonung der Operation bei Additions- und Subtraktionsaufgaben; Überprüfung auf Lateralitätsstörung
6. Im Ergebnis wird nur der Übertrag notiert	17889 + 5403 11181	Bündelung; Veranschaulichung am Abakus oder Stellenwerttafel und zugehörige Notation
7. Notation der ganzen Teilsumme	17889 + 5403 11212812	Verdeutlichung der Bündelung und Spaltenschreibweise
8. Übertragsfehler 8.1 Kein Übertrag	17889 + 5403 12282	Verdeutlichung der Bündelung; Handlungen mit Geldwerten
8.2 Kein Übertrag zur 0	17889 + 5403 23282	Verdeutlichung des Rechnens mit der Null bei den verschiedenen Operationen
8.3 Kein Übertrag in die leere Stelle	17889 + 5403 13391	wie 2. und 8.2
8.4 Übertrag in die falsche Spalte	17889 + 5403 122382	Bündelung an der Stellenwerttafel und begleitende Notation

- Fehler bei der schriftlichen Subtraktion

Beschreibung	**Beispiel**	**Mögliche Hilfen**
1. Fehler beim Einsundeins	7506 – 3825 4581	Wiederholung des Zahlenraumes bis 20, da dieser beim schriftlichen Verfahren nicht überschritten wird.
2. Multiplikative Verwendung der Null	7506 – 3825 3701	Übung mit der Null im Zahlenraum bis 20; Verdeutlichung mit konkretem Material; Kontrastbeispiele
3. Fehler bei unterschiedlicher Stellenzahl	7506 – 825 611	Wiederholung und Übung an der Stellenwerttafel; spaltenweise Zuordnung der E, Z, H. T; Kontrastaufgaben
4. Subtraktion von links	7506 – 3825 4770	Bündelungsaufgaben; Diskrepanzaufgaben im überschaubaren Zahlenraum bis 20 (100)
5. Inverse Operation	7506 – 3825 11331	Sprachliche Betonung der Operation bei Additions- und Subtraktionsaufgaben; Überschlagsrechnung; Überprüfung auf Lateralitätsstörung; Fehler evtl. bedingt durch Ergänzungsverfahren
6. Falsche Rechenrichtung (“Unterschied”)	7506 – 3825 4321	Kilometerzähler als Veranschaulichungsmittel; nicht “Distanz/Abstand” als Vorstellung, sondern Alternativen
7. Übertragsfehler 7.1 Kein Übertrag	7506 – 3825 4781	Verdeutlichung der Bündelung und Spaltenschreibweise; Registerbrett
7.2 Falsche Operation mit Übertragsziffer	7506 – 3825 5881	Bündelungs- und Entbündelungsübungen; halbschriftliche Verfahren
7.2 Vermeidung des Übertrags (“Geht nicht”)	7506 – 3825 4001	Handlungen mit konkretem Material, z.B. Geld, und begleitende Notation
7.3 Überträge nur gesammelt im größten Stellenwert	7506 – 3825 2781	Bündelungswiederholung
8.4 Übertrag in die falsche Spalte	7506 – 3825 13781	Registerbrett, Abakus

- Fehler bei der schriftlichen Multiplikation

Beschreibung	Beispiel	Mögliche Hilfen
1. Übertragen wird die Zahl, nicht die Ziffer	371 · 6 5826 als 1 · 6 = 6 7 · 6 = 42 3 · 6+40=58	Halbschriftliches Verfahren mit Veranschaulichung und Übergang zu verkürzenden Verfahren
2. Übertrag wird dem Multiplikanden zugeschlagen	371 · 6 4226	Behalteziffer gesondert notieren; Kontrastaufgaben
3. Multiplikation von links	371 · 6 1011 oder 371 · 6 8310	Hilfspfeil für die Rechenrichtung; Überprüfung der R-L-Orientierung; halbschriftliche Verfahren wiederholen
4. Falsche Stellenzuordnung	856 · 27 1712 5992 7704	Darstellung am Registerbrett, Stellenwerttafel; Wiederholung der halbschriftlichen Verfahren; Endnullen in Zwischenprodukten; Ordnung auf Blatt/Karopapier
5. Vernachlässigung der Null	87 · 402 348 174 3654	Multiplikation mit Zehner-, Hunderter-, Tausenderzahlen; mündliches Rechnen; Distributivität veranschaulichen; Kontrast Addition – Multiplikation
6. Interferenz bei der Null mit additiver Bedeutung	87 · 402 348 87 174 35844	Kontrastbeispiel im überschaubaren Zahlenraum; Kleines 1 x 1 mit Null wiederholen (bzw. schon dort benutzen)
7. Multiplikation über Kreuz	64 · 28 128 112 1392 durch 64 · 2 = 128 4 · 28 = 112	Rückgang zu halbschriftlichen Verfahren; Hilfpfeil für Rechenrichtung mit angeben lassen
8. Falsche Stellenschreibweise mit Null- Reperatur	856 · 27 1712 59920 77040	halbschriftliche Verfahren; Geldwerte; Endnullen bei Z, H, T, etc.
9. Multiplikationsbeginn bei größtem Stellenwert	327 · 45 2892 3615 32535	Halbschriftliche Verfahren; Überschlagsrechnung

10. Behalteziffer wird nicht berücksichtigt	$\underline{327 \cdot 45}$ 1288 $\underline{\ \ 1505}$ 14385	Behalteziffer “mit den Fingern festhalten”; Kontrastaufgaben im überschaubaren Zahlenraum

- Fehler bei der schriftlichen Division

Beschreibung	Beispiel	Mögliche Hilfen
1. Bei Division ohne Rest wird eine 0 an das Ergebnis angehängt	1731 : 3 = 5770 15 23 21 21 21 0	Kontrastbeispiele; Stellenwerttafel; Länge des Quotienten (Stellenzahl) vorab bestimmen lassen; Überschlag
2. Vernachlässigung einer oder mehrer Nullen	87058 : 29 = 302 87 05 00 58 58 0	Division von Tausendern, Zehntausendern; Überschlag; spaltenweise Schreibweise
3. Nicht hinreichendes Dividieren in den Zwischenschritten (Teilprodukt zu klein)	510010 : 2 = 2415005 4 11 8 3 2 10 10 010 10 0	(das Verfahren ist nicht prinzipiell falsch, allerdings meist in der Schreibweise); Suche nach größtem Vielfachen < Dividend
4. Divisionsalgorithmus wird nicht abgeschlossen	91762 : 43 = 213 R 17 86 57 43 146 129 17	Spaltenweise Schreibweise betonen; Heftführung und Schrift beachten
5. Fehlerhafte Stellenwertzuordnung der Zwischenprodukte	7288 : 18 = 4398 R 4 72 656 48 176 162 148 144 4	Stellenwertsystem üben; halbschriftlches Verfahren

6. Schriftliche Subtraktion fehlerhaft	1731 : 3 = 543 R 1 $\underline{15}$ 13 $\underline{12}$ 11 $\underline{10}$ 1	Subraktion im Zahlenraum bis 20; Kleines Einmaleins; Übungen zum Ergänzen
7. Fehlerhafte Stellenzuord-nung bei den Zwischen-produkten	1731 : 3 = 507 R 2 $\underline{15}$ 2 $\underline{0}$ 231 $\underline{21}$ 2	halbschriftliches Rechnen; Stellen-werttafel; Überschlagsrechnung mit Stellenanzahlbestimmung
8. Null im Quo-tienten nicht berück-sichtigt	2135 : 7 = 35 $\underline{21}$ 035 $\underline{35}$ 0	Stellenwerttafel; Geldwerte

- Die Grenzen der Fehleranalyse

Nicht alle Denkprozesse sind allerdings mit Hilfe der Fehleranalyse nachzubilden. Gerade im Bereich der Fehler und Fehlstrategien überraschen uns die Kinder mit einer solchen Kreativität, die wir in anderen Bereichen gerne sehen würden. So sind inzwischen in der Literatur allein für die schriftliche Subtraktion mehr als 250 (in Worten: zweihundertfünfzig) verschiedene Fehlstrategien bekannt.

Versprachlichung des Rechen- und Denkvorgangs

Eine Durchsicht der Fehler allein hilft in Extremfällen selbst zusammen mit einem tiefen Nachdenken und Insichgehen nicht weiter. Das Kind selbst muss, soweit es kann, Auskunft über die abgelaufenen Denkprozesse geben. So lassen sich die aus unserer Sicht besonders reizvollen aber leider abwegigen (Fehl-) Lösungsstrategien ohne seine Hilfe nur schwer rekonstruieren.

Probleme mit Sachaufgaben

Sachrechnen hat innerhalb des Mathematikunterrichts einen hohen

Stellenwert. Es stellt den Bezug der Arithmetik (und Geometrie) zur Umwelt in mannigfaltiger Weise her. Sachrechnen hat hierbei die Funktion, als eigenständiger Lernstoff (insbesonder für Größen), als Lernprinzip und als Umwelterschließung zu dienen (Winter, 1992). Trotz dieser Anbindung an die Alltagswelt der Schüler und Schülerinnen, die die Anschaulichkeit erleichtern sollte, stellt gerade das Sachrechnen, stellen die Textaufgaben das Schwierigste im Mathematikunterricht aller Schulstufen dar. Die Gründe für diesbezügliche Lernschwierigkeiten sind vielfältig und bedürfen in jedem Einzelfall einer genaueren Analyse (vgl. Radatz & Schipper, 1983; Lorenz & Radatz, 1993).

- Schwierigkeiten aufgrund der Aufgabendarbietung

Schwierigkeiten aufgrund der Aufgabendarbietung

– Die sprachlich-syntaktische Struktur des Textes, seine Länge und Komplexität überfordern einen individuellen Schüler oder eine Schülerin; verschachtelte Sätze mit unklarer Gliederung versperren das Verständnis der geschilderten Situation;
– es werden unbekannte Wörter oder gar Fachtermini und Redewendungen aus dem Schüler unbekannten Bereichen verwendet

Mögliche Hilfen:

Darbietung in anderer Form, etwa in Form von Bildergeschichten, als Bildaufgaben, durch Tabellen oder Graphiken; Nachspielen der Situation in Rollenspielen

- Schwierigkeiten aufgrund der Sachstruktur

Schwierigkeiten aufgrund der Sachstruktur

– Mangelnde Vertrautheit mit der geschilderten Situation, Zugänglichkeit der Sache ist nicht gegeben, z.B.
  Abbuchungen vom Konto
  wöchentliches Sparen
– Die Sachstruktur selbst ist komplex

Geschwindigkeiten (Kilometer pro Stunde)
Preise (DM pro Kilogramm)
Umrechnungen

Mögliche Hilfen:

Bei Textaufgaben und Sachsituationen die Sache ernst nehmen, d.h. insbesondere nur solche Situationen aufnehmen, die den Kindern hinreichend vertraut sind, andere Bereiche vermeiden oder vorab im Sachunterricht einführen (dann lassen sich aber auch fächerübergreifende Unterrichtsformen finden und für die Schüler interessant gestalten).

- Schwierigkeiten innerhalb des Lösungsprozesses

Schwierigkeiten innerhalb des Lösungsprozesses

Die Aufgabenstruktur ist komplex (nicht die Sachstruktur!)

– die Anzahl der erforderlichen Lösungsschritte, d.h. der Teilrechnungen ist hoch
– die erforderlichen Rechnungen sind komplex, etwa Division gefolgt von Subtraktion
– die Unlösbarkeit der Aufgabe (“Kapitänsaufgabe”) wird nicht gesehen, so dass sich impulsive oder hilflose Lösungsversuche einstellen

Mögliche Hilfen:

– Anforderungen behutsam steigern, Komplexität nicht auf beiden Ebenen gleichzeitig erhöhen
– frühzeitig, d.h. bereits in der 1. Klasse, mit Kapitänsaufgaben beginnen und Situationen behandeln, die uneindeutig, ambivalent und vielschichtig sind bzw. mehrere Lösungen zulassen (Realitätsnähe)

- Didaktogene Lernschwierigkeiten

Didaktogene Lernschwierigkeiten

– Untersuchungsstrategien und Behandlung der Sache wird zu frühzeitig vom formalen Rechenalgorithmus abgelöst

- Der Mathematikunterricht als “Regelspiel” lässt die Schüler und Schülerinnen vorschnell auf die Zahlen und deren Verrechnung fokussieren
- Sachaufgaben werden von ihnen lediglich als Übungsplattform für die gerade behandelte Rechentechnik gesehen. Die notwendige Rechenoperation wird nicht aus der Sachsituation heraus entwickelt, sondern im Kontext des aktuellen Unterrichts gesucht oder durch die in der Aufgabe verwendeten Zahlen erraten (die Verbindung einer sehr großen mit einer sehr kleinen Zahl ist meist Division, zwei mittelgroße Zahlen werden addiert oder subtrahiert, zwei mittelkleine Zahlen multipliziert)

Mögliche Hilfen:
- Aufgaben mit irrealen Zahlen stellen
- Aufgaben nicht nur als Anwendungen sehen, sondern gleichzeitig die Rechenoperationen mischen
- Unterricht nicht mit Sachaufgaben vorstrukturieren, sondern problemhaltige Sachsituationen vorgeben, in denen vielfältige Berechnungen möglich sind

Darüber hinaus gibt es für Text- und Sachaufgaben eine Reihe von Hilfen (vgl. Radatz & Schipper, 1983; Lorenz & Radatz, 1993), die hier nicht aufgeführt werden müssen. Sie sind den Lehrern hinlänglich bekannt.

Jens Holger Lorenz, Prof. Dr.
Professor an der Pädagogischen Hochschule Heidelberg

Literatur

Abele, A./Kalmbach, H. u.a.	Handbuch zur Grundschulmathematik, 1. und 2. Schuljahr. Klett, Stuttgart, 1998
Akademie für Lehrerfortbildung Dillingen	Rechenstörungen. Diagnoseförderung-Materialien. Auer, Donauwörth, 1999
ders.:	Rechenstörungen. Unterrichtspraktische Förderung. Auer, Donauwörth, 2000
Dihlmann, G./Lorenz, H.:	Materialien zur Entwicklung mathematischer Vorstellungen. Hrsg.: Landesinstitut für Erziehung und Unterricht , Stuttgart 1998
Gamper, H.	Lösungsstrategien und Fehler von rechenschwachen Kindern beim Lösen von Arithmetikaufgaben. Universität Bern, 1983
Gerster, H.-D.	Schülerfehler bei schriftlichen Rechenverfahren. Herder, Freiburg, 1982

Gerster, H.-D.	Lerndefizite als Folge von Lehrdefiziten? Erfahrungen aus der Analyse von Schülerfehlern bei den schriftlichen Rechenverfahren. In: J:H: Lorenz (Hrsg.): Lernschwierigkeiten: Forschung und Praxis (S. 56-74). Aulis, Köln, 1984.
Lörcher, G.A.	Lernhindernisse im Mathematikunterricht der Grundschule. In: J.H. Lorenz (Hrsg.): siehe oben
Lorenz, H./Radatz, H.:	Handbuch des Förderns im Mathematikunterricht. Schroedel, Hannover, 1993
Milz, S.:	Rechenschwächen erkennen und behandeln. borgmann, Dortmund, 1994
Ministerium für Kultus und Sport Baden-Württemberg:	Schwierigkeiten im Mathematikunterricht in der Grundschule, Prävention – Diagnose – Motivation – Förderung. Stuttgart 1998
Nestle, W.:	Schwierigkeiten im Mathematikunterricht, Projekt zur Lehrerfortbildung, Konzeption-Ergebnisse-Empfehlungen PH Reutlingen 2000

ders.: Arbeitsmittel und Spiele im elementaren Mathematikunterricht.
PH Reutlingen 2000

ders: Qualitative Diagnose bei Schwierigkeiten im elementaren Mathematikunterricht.
Bezug: Projekt: Schwierigkeiten im Mathematikunterricht; Postfach 2344, 72713 Reutlingen

Radatz, H. Fehleranalyse im Mathematikunterricht.
Vieweg, Braunschweig, 1980

Radatz, H. / Schipper, W. Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen.
Schroedel, Hannover, 1983

Schwarz, M. u. a. : Wenn eins und eins nicht gleich zwei.
Ratgeber bei Rechenschwäche.
Hrsg.: IFRK e. V. Stuttgart, 1998

Winter, H. Sachrechnen in der Grundschule
Cornelsen, Frankfurt, 1992

Initiative zur Förderung rechenschwacher Kinder e.V.

Symposium 2000 – Dyskalkulie – Arithmasthenie – Rechenschwäche”
Am 29. Januar 2000 in der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

Bezugsadresse:

IFRK e.V.
Geschäftsstelle
Höhenstr. 20
75239 Eisingen