Für die schriftliche Fachhochschulreifeprüfung sind nur die Inhalte der Seiten 1 bis 6 der Merkhilfe relevant, die nicht mit einem grauen Balken markiert sind.

Relevante Inhalte nur für die Berufsoberschule (BOS) sind mit „nur BOS“ ausgewiesen.

1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots; -2; -1; 0; 1; 2; \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \middle\vert a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}^*\right\}$	Menge der rationalen Zahlen	$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \vert x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2 Geometrie

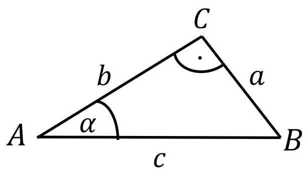
Ebene Figuren A: Flächeninhalt u: Umfang

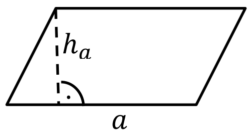
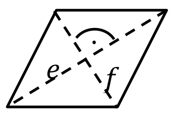
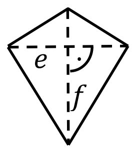
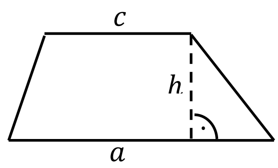
Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

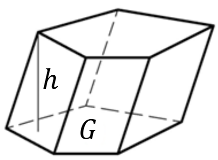
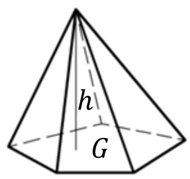
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$

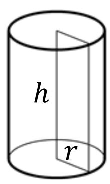
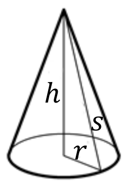


Parallelogramm	Raute	Drachen	Trapez
$A = a \cdot h_a$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$	$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$
			

Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $u = 2 \cdot \pi \cdot r$

Körper V: Volumen M: Mantelflächeninhalt O: Oberflächeninhalt G: Grundflächeninhalt

Prisma	Pyramide
$V = G \cdot h$ 	$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$ 

Gerader Kreiszylinder	Gerader Kreiskegel
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$ 	$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$ $M = \pi \cdot r \cdot s$ 

Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

3 Terme

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

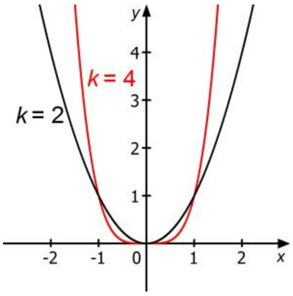
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad$ $\frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\qquad$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\qquad$ $\frac{a^r}{b^r} = \left(\frac{a}{b}\right)^r$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\qquad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\qquad$ $a^0 = 1$

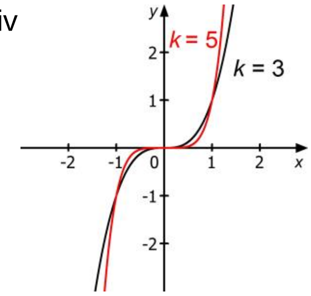
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^k$ mit $k \in \mathbb{Z}^*$

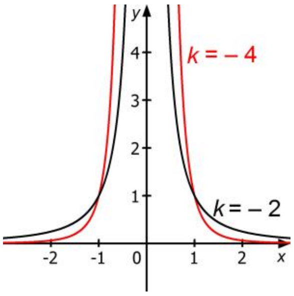
k gerade und positiv



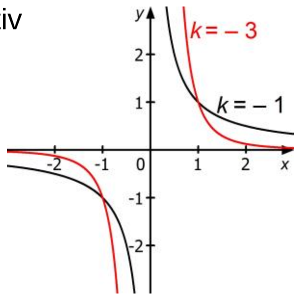
k ungerade und positiv



k gerade und negativ

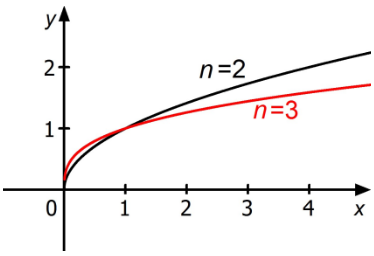


k ungerade und negativ



waagrechte Asymptote $y = 0$, senkrechte Asymptote $x = 0$

Wurzelfunktion mit $f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ und $a \geq 0$

$x^n = a$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm\sqrt[n]{a}$
	falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = -a$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{a}$

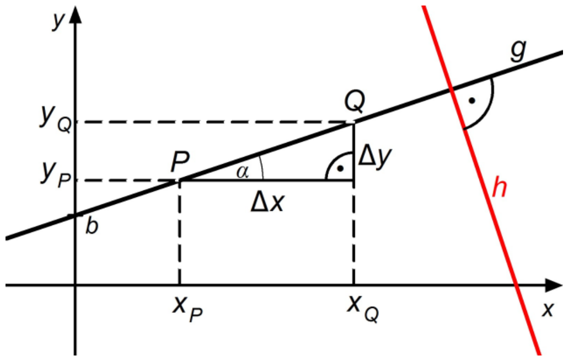
Polynomfunktion

Polynomfunktion ersten Grades (Lineare Funktion)

$f(x) = mx + b$

Das Schaubild ist eine Gerade mit der Steigung m und dem y-Achsenabschnitt b.

Steigung	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$
Punkt-Steigungs-Form	$y = m(x - x_P) + y_P$
Steigungswinkel	$m = \tan(\alpha)$
Orthogonalität	$m_g \cdot m_h = -1 \Leftrightarrow g \perp h$



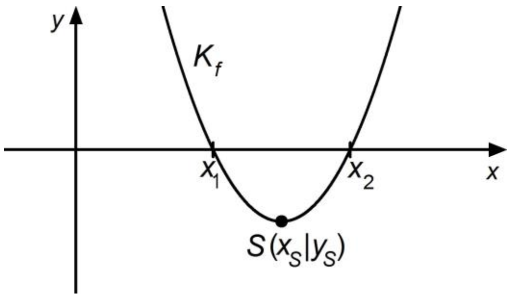
Polynomfunktion zweiten Grades (Quadratische Funktion)

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

Das Schaubild ist eine Parabel mit Scheitel S.

Scheitelform $\quad y = a(x - x_S)^2 + y_S$



Quadratische Gleichung

$ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	falls $b^2 - 4ac \geq 0$
$x^2 + px + q = 0$	$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	falls $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \geq 0$

Polynomfunktion dritten Grades

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ mit den Nullstellen x_1, x_2 und x_3

Polynomfunktion n-ten Grades

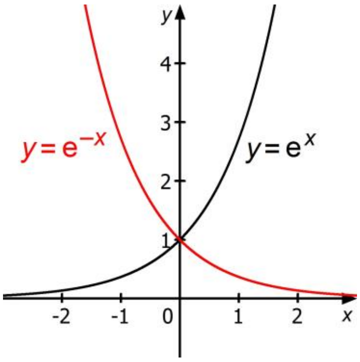
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}; a_n \neq 0$

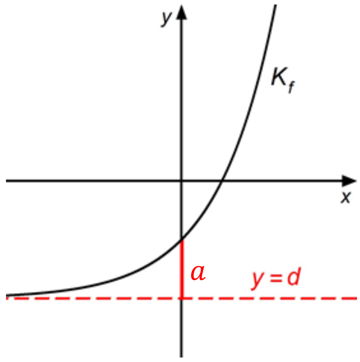
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot q^x + d$ mit $a \neq 0; q > 0 \wedge q \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{bx} + d$ mit $a \neq 0; b \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = d$



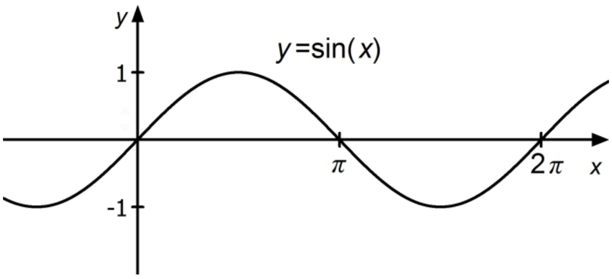


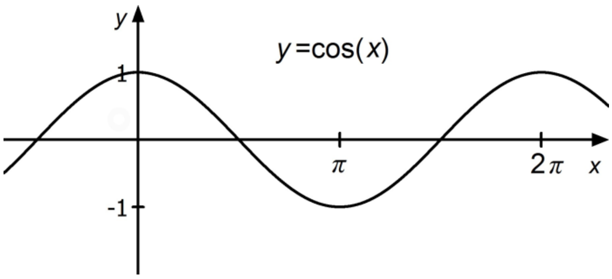
Exponentialgleichung mit $q, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = q^x \Leftrightarrow x = \log_q(y)$ $\quad$ $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln(y)$

$q^x = e^{\ln(q) \cdot x}$ $\quad$ $e^{\ln(y)} = y$ $\quad$ $\ln(e^x) = x$

Trigonometrische Funktion

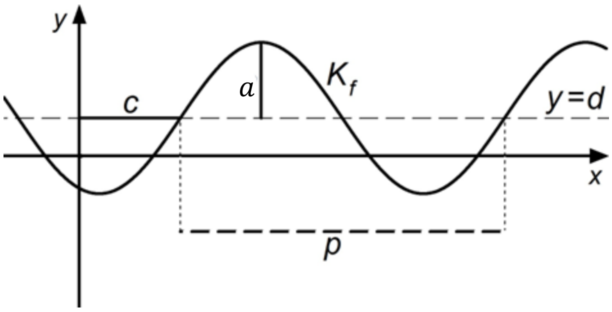




$f(x) = a \cdot \sin\big(b(x - c)\big) + d$ mit $a, b \neq 0$

Amplitude $\quad |a|$

Periode $\quad p = \dfrac{2\pi}{|b|}$

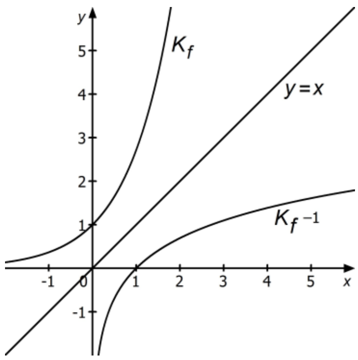


Transformationen

Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der *x*-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der *y*-Achse	$g(x) = f(-x)$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ $(b > 0)$ in *x*-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a $(a > 0)$ in *y*-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$
Verschiebung	um *c* in *x*-Richtung	$g(x) = f(x - c)$
	um *d* in *y*-Richtung	$g(x) = f(x) + d$

Umkehrfunktion



Ist eine Funktion f auf einem Intervall streng monoton (wachsend oder fallend), so ist f auf diesem Intervall umkehrbar.

Das Schaubild der Umkehrfunktion f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von f an der ersten Winkelhalbierenden.

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche / Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_1; x_2]$ $\qquad \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Momentane / Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 $\qquad f'(x_0)$

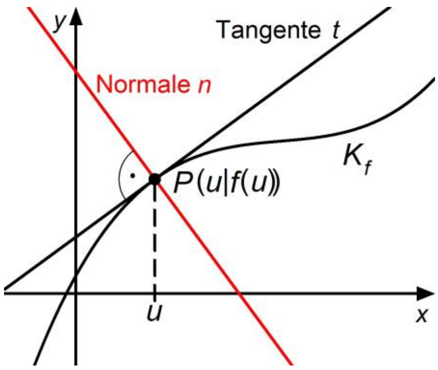
Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x) + v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) + v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $C \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^k$	$f'(x) = k \cdot x^{k-1}$	$F(x) = \frac{1}{k+1} \cdot x^{k+1} + C$	mit $k \neq -1$
$f(x) = e^{bx}$	$f'(x) = b \cdot e^{bx}$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot e^{bx} + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \ln(x)$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$		
$f(x) = \sin(bx)$	$f'(x) = b \cdot \cos(bx)$	$F(x) = -\frac{1}{b} \cdot \cos(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$
$f(x) = \cos(bx)$	$f'(x) = -b \cdot \sin(bx)$	$F(x) = \frac{1}{b} \cdot \sin(bx) + C$	mit $b \in \mathbb{R}^*$

Tangente und Normale



Tangentensteigung $\qquad m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $\qquad y = f'(u)(x-u) + f(u)$

nur BOS

Normalensteigung $\qquad m_n = -\dfrac{1}{f'(u)}$

Normalengleichung $\qquad y = -\dfrac{1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$

Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

Symmetrie	$f(-x) = f(x)$ für alle x	$\Leftrightarrow$	K_f ist symmetrisch zur y-Achse
	$f(-x) = -f(x)$ für alle x	$\Leftrightarrow$	K_f ist symmetrisch zum Ursprung
Monotonie	$f\,'(x) \geq 0$ im Intervall J	$\Leftrightarrow$	f wächst monoton im Intervall J
	$f\,'(x) \leq 0$ im Intervall J	$\Leftrightarrow$	f fällt monoton im Intervall J
	$f\,'(x) > 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	f wächst streng monoton in J
	$f\,'(x) < 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	f fällt streng monoton in J
Krümmung	$f''(x) > 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist im Intervall J linksgekrümmt
	$f''(x) < 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist im Intervall J rechtsgekrümmt
Hochpunkt	$f\,'(x_0) = 0$ und		
	VZW +/- von $f\,'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Hochpunkt $H\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$
Tiefpunkt	$f\,'(x_0) = 0$ und		
	VZW -/+ von $f\,'(x)$ bei x_0 oder $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Tiefpunkt $T\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0$ und		
	VZW von $f''(x)$ bei x_0 oder $f'''(x_0) \neq 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Wendepunkt $W\big(x_0 \vert f(x_0)\big)$

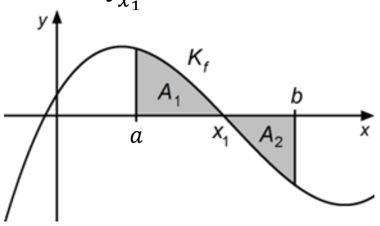
Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$ wobei F eine Stammfunktion von f ist.

Flächenberechnung

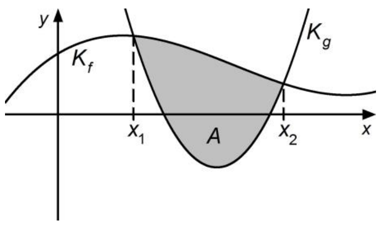
$$A_1 = \int_a^{x_1} f(x)\,dx$$

$$A_2 = -\int_{x_1}^{b} f(x)\,dx$$



$$A = \int_{x_1}^{x_2} \big(f(x) - g(x)\big)\,dx$$

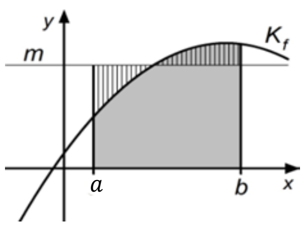
falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



nur BOS

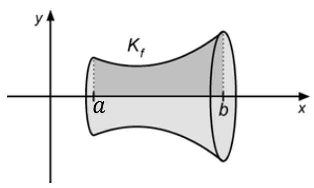
Mittelwert

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$



Rotationsvolumen

$$V = \pi \cdot \int_a^b \big(f(x)\big)^2\,dx$$



Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.

6 Stochastik

Ereignis	Teilmenge der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments
Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A	$0 \leq P(\mathrm{A}) \leq 1 \qquad P(\mathrm{S}) = 1$
Gegenereignis $\overline{\mathrm{A}}$	$P(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - P(\mathrm{A})$
Laplace-Experiment	Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) gleich wahrscheinlich sind
Laplace-Wahrscheinlichkeit	$P(\mathrm{A}) = \frac{\lvert\mathrm{A}\rvert}{\lvert\mathrm{S}\rvert} = \frac{\text{Anzahl der für A günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}}$

Zusammengesetzte Ereignisse

Additionssatz	$P(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) - P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B}) = \frac{P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})}{P(\mathrm{A})} \quad \Leftrightarrow \quad P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$
A und B stochastisch unabhängig	$P(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = P(\mathrm{A}) \cdot P(\mathrm{B})$

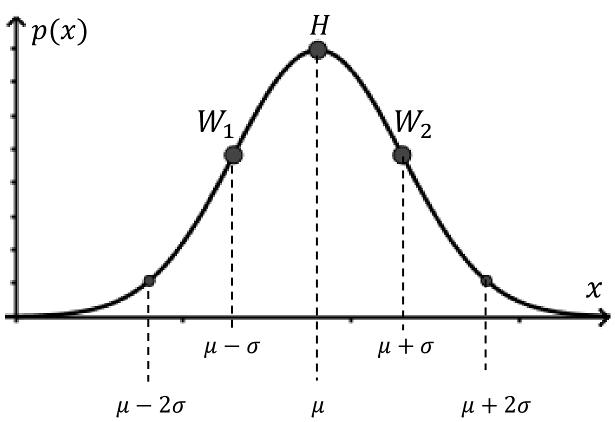
Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

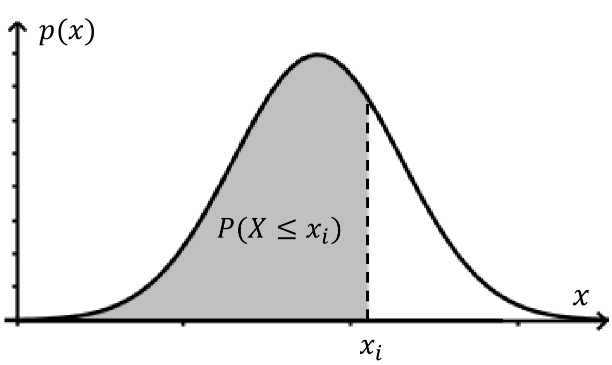
Erwartungswert $\quad E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$

Normalverteilung

Stetige Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ und Standardabweichung σ

Dichtefunktion $\quad p(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad x \in \mathbb{R}$





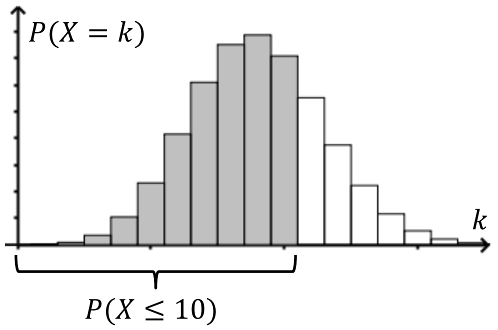
Binomialverteilung

Zufallsgröße X: Anzahl der Treffer k, Zahl der Versuche n, Trefferwahrscheinlichkeit p

Binomialkoeffizient $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$ mit $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$

Wahrscheinlichkeit $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Kumulierte Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k) = P(X = 0) + P(X = 1) + \cdots + P(X = k)$



$$P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot (1-p)^{n-i}$$

Erwartungswert $E(X) = \mu = n \cdot p$

Varianz $\sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p)$

Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Eine Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung gilt als brauchbar für $\sigma > 3$.

Sigma-Regeln

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\%$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\%$

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$

$P(\mu - 1{,}64\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}64\sigma) \approx 90\%$

$P(\mu - 1{,}96\sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96\sigma) \approx 95\%$

$P(\mu - 2{,}58\sigma \leq X \leq \mu + 2{,}58\sigma) \approx 99\%$

Vertrauensintervall

Näherungsweise bestimmtes Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p

$$\left[h - c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\ ;\ h + c \cdot \sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right] \quad \text{mit} \quad h = \frac{X}{n}$$

Vertrauenswahrscheinlichkeit	90%	95%	99%
c	1,64	1,96	2,58

Das Vertrauensintervall hat höchstens die Länge l, wenn für den Stichprobenumfang n gilt $n \geq \frac{c^2}{l^2}$.

nur BOS

Statistische Tests

Mögliche Fehler beim Testen einer Hypothese H_0

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung
H_0 wird nicht verworfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art

Die Irrtumswahrscheinlichkeit α ist die größtmögliche Wahrscheinlichkeit, einen Fehler 1. Art zu begehen.

Einseitiger Signifikanztest

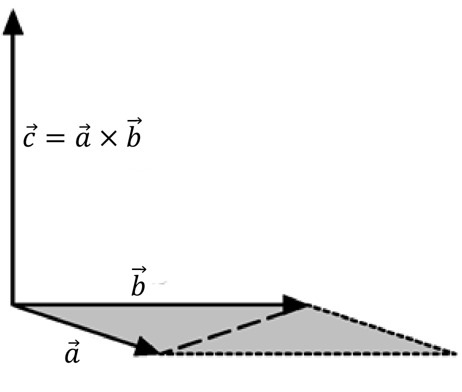
	Nullhypothese H_0	Gegenhypothese H_1	Kriterium	Ablehnungsbereich
linksseitig	$\mathrm{H}_0\colon p \geq p_0$	$\mathrm{H}_1\colon p < p_0$	$P(X \leq g) \leq \alpha$	$\{0; 1; \ldots; g\}$
rechtsseitig	$\mathrm{H}_0\colon p \leq p_0$	$\mathrm{H}_1\colon p > p_0$	$P(X \geq g) \leq \alpha$	$\{g; \ldots; n\}$

7 Vektorgeometrie

Betrag eines Vektors	$\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$
Einheitsvektor	$\overrightarrow{a_0} = \dfrac{\vec{a}}{\lvert\vec{a}\rvert}$
Länge der Strecke AB	$\lvert\overrightarrow{AB}\rvert = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$
Mittelpunkt *M* einer Strecke AB	$\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$
Skalarprodukt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$
Winkel φ zwischen zwei Vektoren	$\cos(\varphi) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert \cdot \lvert\vec{b}\rvert} \qquad 0° \leq \varphi \leq 180°$
Orthogonalität	$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$
Vektorprodukt	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$
	$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$ mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ keine Vielfachen voneinander

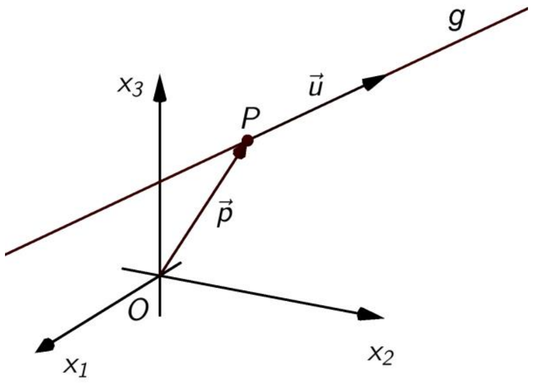
nur BOS

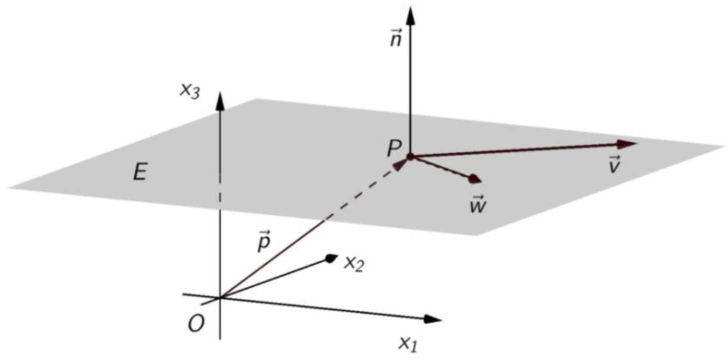
Flächeninhalt eines Parallelogramms	$A = \lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$
Flächeninhalt eines Dreiecks	$A = \frac{1}{2}\lvert\vec{a} \times \vec{b}\rvert$



Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Spannvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und Normalenvektor $\vec{n}$





Parameterform	$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$	$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$	mit $s, t \in \mathbb{R}$
Koordinatenform		$E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$	mit $b \in \mathbb{R}$
Normalenform		$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$	

nur BOS

Winkel

zwischen zwei Geraden $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{u_1} \cdot \overrightarrow{u_2}|}{|\overrightarrow{u_1}| \cdot |\overrightarrow{u_2}|}$ $\quad 0° \leq \alpha \leq 90°$

zwischen Gerade und Ebene $\sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$ $\quad 0° \leq \alpha \leq 90°$

nur BOS

zwischen zwei Ebenen $\cos(\alpha) = \dfrac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ $\quad 0° \leq \alpha \leq 90°$

Abstand

zwischen Punkt A und Ebene $E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$ $\quad d = \left|\dfrac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

zwischen Punkt A und Ebene $E: n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 = b$ $\quad d = \left|\dfrac{n_1a_1 + n_2a_2 + n_3a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right|$

nur BOS

zwischen zwei windschiefen Geraden $\quad d = \left|\dfrac{(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right|$

$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ und $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}$ mit $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$

8 Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

Einheitsmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{A}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

Abbildungsmatrizen

Abbildung α

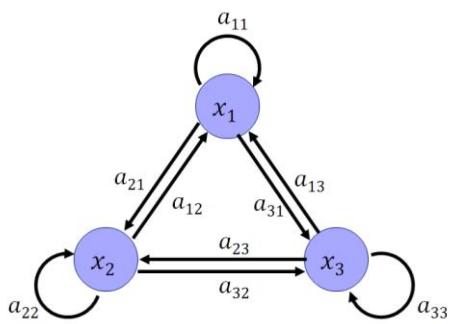
$\alpha(\vec{x}) = \vec{x}' = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x} + \vec{c}$ mit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

Spezielle Abbildungen

Verschiebung um $\vec{c}$	$\alpha(\vec{x}) = \vec{x} + \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$
Spiegelung an der x_1-Achse	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
Spiegelung an der x_2-Achse	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
Spiegelung am Ursprung	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
Streckung in x_1-Richtung mit Faktor $a \in \mathbb{R}$	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $a = 0$: Orthogonalprojektion auf die x_2-Achse
Streckung in x_2-Richtung mit Faktor $a \in \mathbb{R}$	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$ $a = 0$: Orthogonalprojektion auf die x_1-Achse
Streckung am Ursprung mit Faktor $a \in \mathbb{R}$	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$
Drehung um den Ursprung mit Winkel φ	$\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \cdot \vec{x}$

Übergangsprozesse

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix	alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1
Aus Verteilung $\vec{x}$ wird Verteilung $\vec{y}$	$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$
Stabilitätsvektor $\vec{x}$	$\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$
Zyklischer Prozess	$\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ für ein $k > 1$

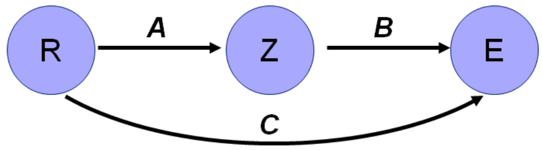
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand E

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}$



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe $\vec{r}$, Zwischenprodukte $\vec{z}$, Endprodukte $\vec{p}$

$\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ $\quad$ $\vec{z} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{p}$ $\quad$ $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \vec{p} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten $\overrightarrow{k_R}$, Fertigungskosten der Zwischenprodukte $\overrightarrow{k_Z}$,
Fertigungskosten der Endprodukte $\overrightarrow{k_E}$

variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\overrightarrow{k_v} = \overrightarrow{k_R} \cdot \boldsymbol{C} + \overrightarrow{k_Z} \cdot \boldsymbol{B} + \overrightarrow{k_E}$

Gesamtkosten $K = \overrightarrow{k_v} \cdot \vec{p} + K_{\text{fix}}$

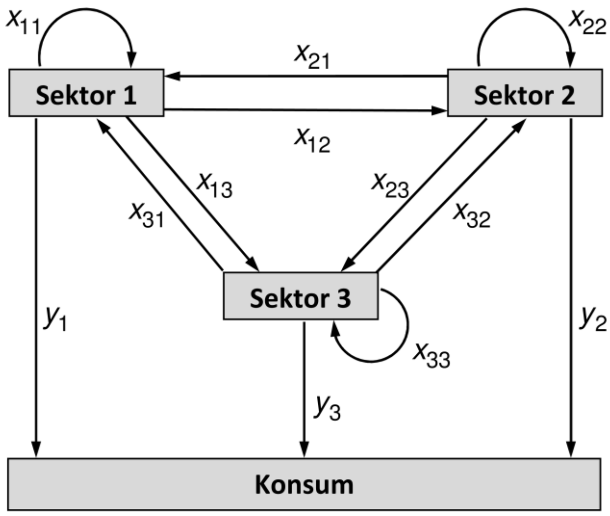
nur BOS

Leontief-Modell

Input-Output-Matrix

$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$

wobei x_{ij} die Lieferung des Sektors i an den Sektor j darstellt.



Produktionsvektor $\quad$ $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

Konsumvektor $\quad$ $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$

Technologiematrix $\quad$ $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ mit $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$

Es gilt: $\quad$ $(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}) \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Interner Verbrauch $\quad$ $\vec{v} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{x}$

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.