1 Zahlenmengen

$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;...\}$	Menge der natürlichen Zahlen	$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$
$\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;...\}$	Menge der ganzen Zahlen	$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen	$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\mathbb{R}_+ = \{x \mid x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 0\}$	Menge der nichtnegativen reellen Zahlen	$\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$

2 Geometrie

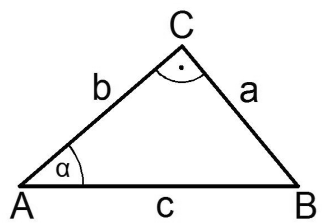
Ebene Figuren A: Fläche U: Umfang

Dreieck $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$

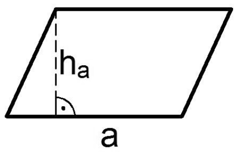
Rechtwinkliges Dreieck

Satz des Pythagoras $c^2 = a^2 + b^2$

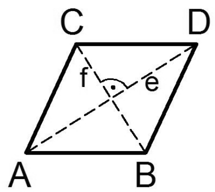
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c}$ $\cos(\alpha) = \frac{b}{c}$ $\tan(\alpha) = \frac{a}{b}$



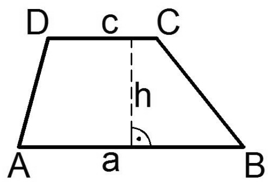
Parallelogramm
$A = a \cdot h_a$



Raute
$A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$



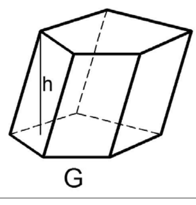
Trapez
$A = \frac{1}{2} \cdot (a+c) \cdot h$



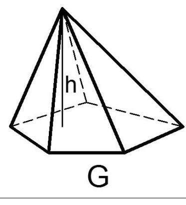
Kreis $A = \pi \cdot r^2$ $U = 2 \cdot \pi \cdot r$

Körper V: Volumen M: Mantelfläche O: Oberfläche G: Grundfläche

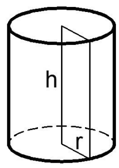
Prisma
$V = G \cdot h$



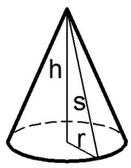
Pyramide
$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$



Gerader Kreiszylinder
$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h$



Gerader Kreiskegel
$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$
$M = \pi \cdot r \cdot s$



Kugel $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$ $O = 4 \cdot \pi \cdot r^2$

3 Terme

Binomische Formeln

$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ $\qquad$ $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$ $\qquad$ $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$

Potenzen und Wurzeln

mit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$; $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$; $r, s \in \mathbb{R}$

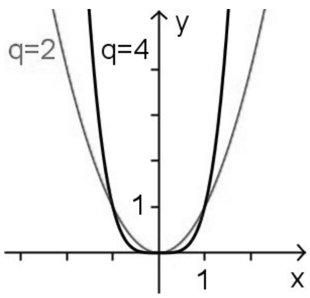
$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$ $\qquad$ $\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$ $\qquad$ $a^r \cdot b^r = (ab)^r$ $\qquad$ $\dfrac{a^r}{b^r} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^r$

$a^{-r} = \dfrac{1}{a^r}$ $\qquad$ $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ $\qquad$ $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$ $\qquad$ $a^0 = 1$

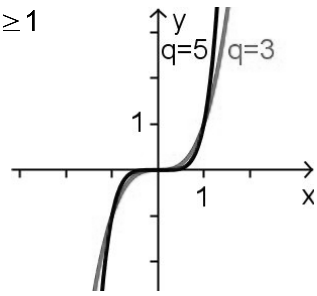
4 Funktionen und zugehörige Gleichungen

Potenzfunktion mit $f(x) = x^q$ mit $q \in \mathbb{Z}^*$

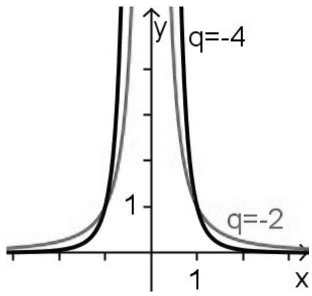
q gerade, $q>1$



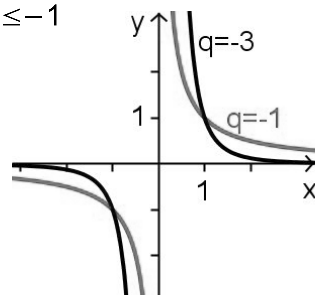
q ungerade, $q \geq 1$



q gerade, $q<-1$



q ungerade, $q \leq -1$



Waagrechte Asymptote $y = 0$

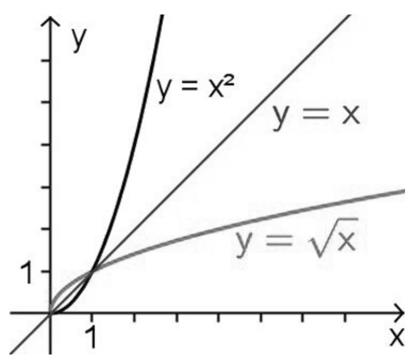
Senkrechte Asymptote $x = 0$

Wurzelfunktion als Umkehrfunktion

Die Potenzfunktion mit $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0;1\}$ und eingeschränkter Definitionsmenge $\mathbb{R}_+$ ist umkehrbar.

Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$

Das Schaubild von f^{-1} entsteht durch Spiegelung des Schaubildes von f an der 1. Winkelhalbierenden (y = x).



Potenzgleichung mit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0 ; 1\}$

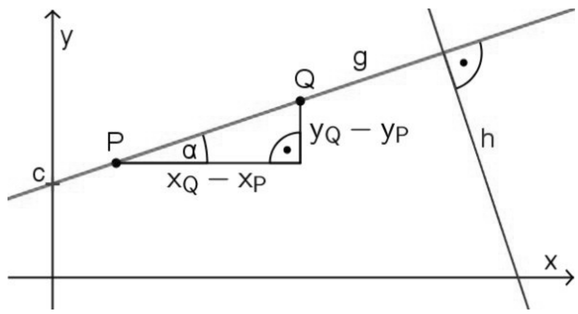
$x^n = a$	$a \geq 0$	falls n gerade	$x_{1/2} = \pm \sqrt[n]{a}$
		falls n ungerade	$x = \sqrt[n]{a}$
$x^n = a$	$a < 0$	falls n ungerade	$x = -\sqrt[n]{-a}$

Polynomfunktion n-ten Grades

$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x^1 + a_0$ mit Koeffizienten $a_i \in \mathbb{R}$; $a_n \neq 0$

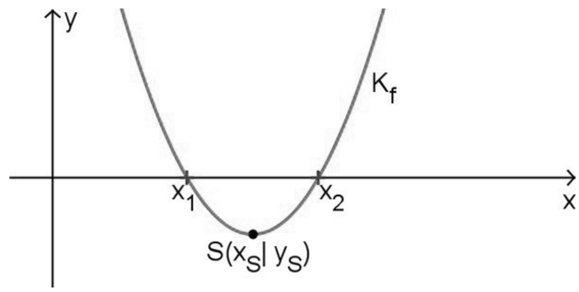
Lineare Funktion

Hauptform	$f(x) = mx + c$
Steigung	$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$
Punktsteigungsform	$f(x) = m(x - x_P) + y_P$
Steigungswinkel	$m = \tan(\alpha)$
Orthogonalität	$m_g \cdot m_h = -1 \quad \Rightarrow \quad g \perp h$



Quadratische Funktion

Normalform	$f(x) = ax^2 + bx + c$
Scheitelform	$f(x) = a(x - x_S)^2 + y_S$
Produktform	$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$



Quadratische Gleichung

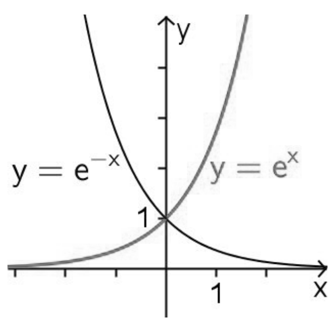
$ax^2 + bx + c = 0$ falls $b^2 - 4ac \geq 0$ $\quad x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

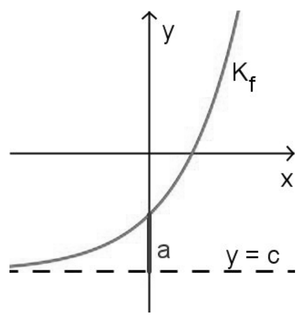
Exponentialfunktion

$f(x) = a \cdot b^x + c$ mit $a \neq 0$; $b > 0 \wedge b \neq 1$

$f(x) = a \cdot e^{kx} + c$ mit $a \neq 0$; $k \in \mathbb{R}^*$

Asymptote $y = c$





Exponentialgleichung mit $b, y \in \mathbb{R}_+^*$

$y = b^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \log_b(y)$

$y = e^x \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(y)$

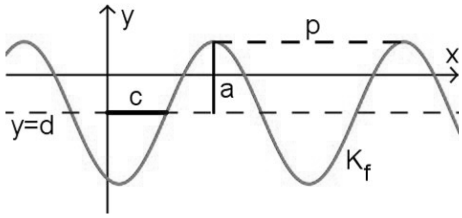
$b^x = e^{\ln(b) \cdot x}$ $\qquad \log_b(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(b)}$ $\qquad e^{\ln(y)} = y$ $\qquad \ln(e^x) = x$

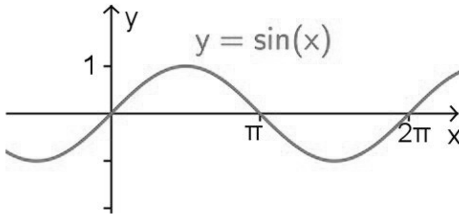
Trigonometrische Funktion

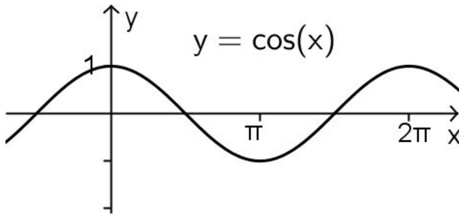
$f(x) = a \sin(b(x-c)) + d$

Amplitude $|a|$

Periode $p = \frac{2\pi}{|b|}$







Bogenmaß x	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
cos(x)	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Abbildungen

Das Schaubild von g entsteht aus dem Schaubild von f durch

Spiegelung	an der x-Achse	$g(x) = -f(x)$
	an der y-Achse	$g(x) = f(-x)$
Verschiebung	um c in x-Richtung	$g(x) = f(x-c)$
	um d in y-Richtung	$g(x) = f(x)+d$
Streckung	mit Faktor $\frac{1}{b}$ in x-Richtung	$g(x) = f(b \cdot x)$
	mit Faktor a in y-Richtung	$g(x) = a \cdot f(x)$

5 Analysis

Änderungsrate

Durchschnittliche/Mittlere Änderungsrate im Intervall $[x_0;x_1]$ $\quad \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$

Momentane/Lokale Änderungsrate an der Stelle x_0 $\quad f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

Ableitungsregeln

Summenregel	$f(x) = u(x)+v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x)+v'(x)$
Faktorregel	$f(x) = a \cdot u(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a \cdot u'(x)$
Produktregel	$f(x) = u(x) \cdot v(x)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
Kettenregel	$f(x) = u(v(x))$	$\Rightarrow$	$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Spezielle Ableitungen / Stammfunktionen mit $c \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	$F(x) = \frac{1}{r+1} \cdot x^{r+1} + c$ mit $r \neq -1$
$f(x) = e^{kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = k \cdot e^{kx}$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot e^{kx} + c$
$f(x) = \sin(k\,x)$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = k \cdot \cos(k\,x)$	$F(x) = -\frac{1}{k} \cdot \cos(k\,x) + c$
$f(x) = \cos(k\,x)$ mit $k \in \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -k \cdot \sin(k\,x)$	$F(x) = \frac{1}{k} \cdot \sin(k\,x) + c$

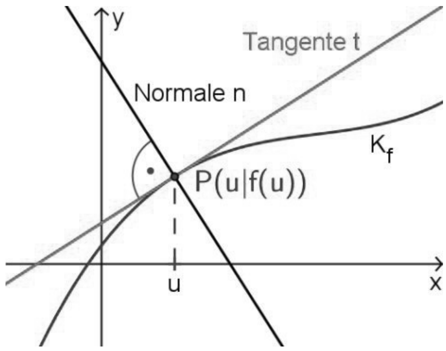
Tangente und Normale

Tangentensteigung $m_t = f'(u)$

Tangentengleichung $y = f'(u)(x-u) + f(u)$

Normalensteigung $m_n = \frac{-1}{f'(u)}$

Normalengleichung $y = \frac{-1}{f'(u)}(x-u) + f(u)$



Untersuchung von Funktionen und ihren Schaubildern

mit Definitionsbereich D

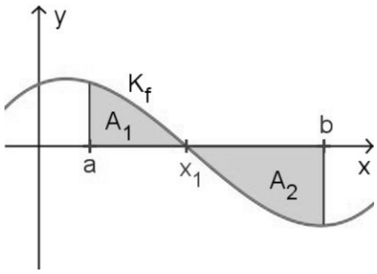
Symmetrie	Achsensymmetrie zur y-Achse	$\Leftrightarrow$	$f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$
	Punktsymmetrie zum Ursprung	$\Leftrightarrow$	$f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$
Monotonie	$f'(x) \geq 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	f steigt monoton in J
	$f'(x) \leq 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	f fällt monoton in J
Hochpunkt	$f'(x_0) = 0$ und VZW +/- von f' bei x_0		
oder	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Hochpunkt $H(x_0 \vert f(x_0))$
Tiefpunkt	$f'(x_0) = 0$ und VZW -/+ von f' bei x_0		
oder	$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Tiefpunkt $T(x_0 \vert f(x_0))$
Krümmung	$f''(x) > 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist in J linksgekrümmt
	$f''(x) < 0$ im Intervall J	$\Rightarrow$	K_f ist in J rechtsgekrümmt
Wendepunkt	$f''(x_0) = 0$ und VZW von f'' bei x_0		
oder	$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$	$\Rightarrow$	K_f hat den Wendepunkt $W(x_0 \vert f(x_0))$

Berechnung bestimmter Integrale

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, wobei F eine Stammfunktion von f ist.

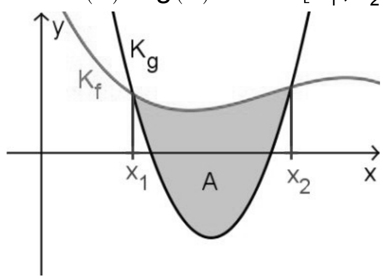
Flächenberechnung

$A = A_1 + A_2 = \int_a^{x_1} f(x)dx - \int_{x_1}^{b} f(x)dx$



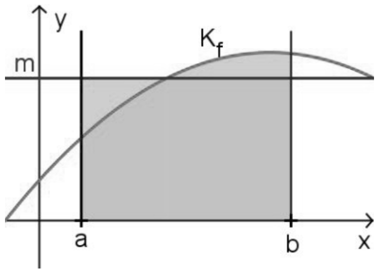
$A = \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x))dx$

falls $f(x) \geq g(x)$ für $x \in [x_1; x_2]$



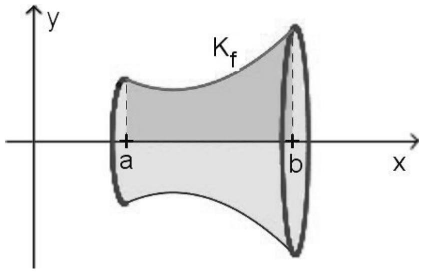
Mittelwert

$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$



Rotationsvolumen

$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 dx$



6 Stochastik

Relative Häufigkeit $h_i = \frac{\text{absolute Häufigkeit der i-ten Merkmalsausprägung}}{\text{Stichprobenumfang } n}$

Arithmetisches Mittel $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$

Median falls n ungerade, mittlerer Wert einer geordneten Datenreihe

falls n gerade, arithmetisches Mittel der beiden in der Mitte stehenden Werte

Modalwert häufigster Wert einer Datenreihe

Ereignis Teilmenge der Ergebnismenge S eines Zufallsexperiments

Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A

$0 \leq P(A) \leq 1$ $\qquad$ $P(S) = 1$

Gegenereignis $\bar{A}$ $\quad P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Additionssatz $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Laplace-Experiment	Zufallsexperiment, bei dem alle Ergebnisse (Elementarereignisse) gleich wahrscheinlich sind
Laplace-Wahrscheinlichkeit	$P(A) = \frac{\lvert A\rvert}{\lvert S\rvert}$
Bedingte Wahrscheinlichkeit	$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Stochastisch unabhängige Ereignisse A, B	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

Urnenmodelle

Aus einer Urne mit n unterscheidbaren Objekten wird k-mal gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten beim Ziehen

- mit Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge n^k
- ohne Zurücklegen mit Beachtung der Reihenfolge $\frac{n!}{(n-k)!}$
- ohne Zurücklegen ohne Beachtung der Reihenfolge (d. h. mit einem Griff) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Zufallsgröße X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$

Erwartungswert	$E(X) = x_1 \cdot P(X=x_1) + x_2 \cdot P(X=x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X=x_n)$
Varianz	$Var(X) = (x_1 - E(X))^2 \cdot p_1 + (x_2 - E(X))^2 \cdot p_2 + \ldots + (x_n - E(X))^2 \cdot p_n$
Standardabweichung	$\sigma(X) = \sqrt{Var(X)}$

Binomialverteilung

Zahl der Versuche n, Trefferzahl k, Trefferwahrscheinlichkeit p

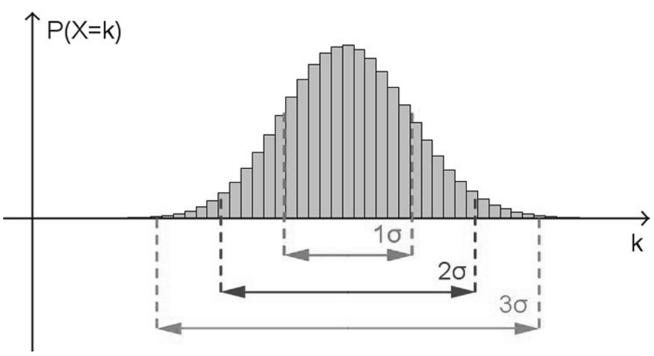
Wahrscheinlichkeit	$P(X=k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$
Kumulierte Wahrscheinlichkeit	$P(X \le k) = P(X=0) + P(X=1) + \ldots + P(X=k)$
Erwartungswert	$E(X) = \mu = n \cdot p$
Standardabweichung	$\sigma = \sqrt{np(1-p)}$

Sigma-Regeln

$P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma) = 68{,}3\,\%$

$P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma) = 95{,}4\,\%$

$P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma) = 99{,}7\,\%$



Näherungsweise bestimmtes Vertrauensintervall für $np(1-p) > 9$

$$\left[h-c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\,;\,h+c\cdot\sqrt{\frac{h(1-h)}{n}}\right] \quad \text{mit} \quad h=\frac{X}{n}$$

90 %	Sicherheitswahrscheinlichkeit	$\Rightarrow$	$c=1{,}64$
95 %	Sicherheitswahrscheinlichkeit	$\Rightarrow$	$c=1{,}96$
99 %	Sicherheitswahrscheinlichkeit	$\Rightarrow$	$c=2{,}58$
99,9 %	Sicherheitswahrscheinlichkeit	$\Rightarrow$	$c=3{,}29$

Das Vertrauensintervall für die unbekannte Wahrscheinlichkeit p hat höchstens die Länge l, wenn für den Stichprobenumfang n gilt $n \geq \frac{c^2}{l^2}$.

7 Lineare Algebra

Vektorgeometrie

Mittelpunkt M einer Strecke $\overline{AB}$ $\qquad \overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$

Betrag eines Vektors $\qquad |\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

Einheitsvektor $\qquad \vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ mit $\vec{a}\neq\vec{0}$

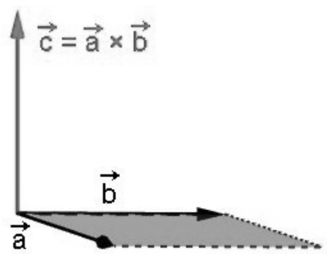
Skalarprodukt $\qquad \vec{a}\cdot\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\qquad \cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$

Orthogonalität $\qquad \vec{a}\perp\vec{b} \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Vektorprodukt

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}$$
$$=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow \quad \vec{c}\perp\vec{a} \text{ und } \vec{c}\perp\vec{b}$$

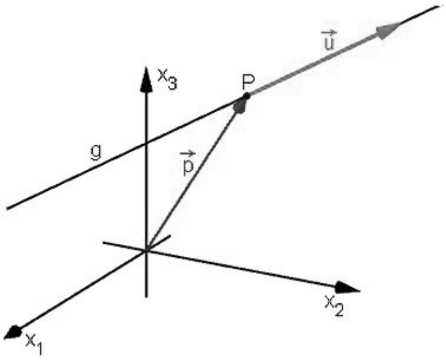


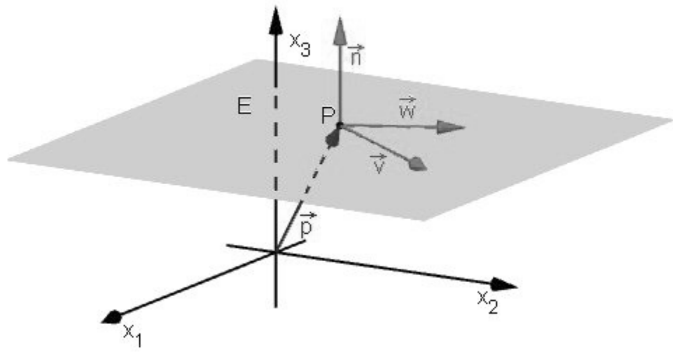
Flächeninhalt eines Parallelogramms $\qquad A=|\vec{a}\times\vec{b}|$

Flächeninhalt eines Dreiecks $\qquad A=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$

Gerade und Ebene im Raum

mit Stützvektor $\vec{p}$, Richtungsvektor $\vec{u}$, Spannvektoren $\vec{v}, \vec{w}$ und Normalenvektor $\vec{n}$





Parameterform	$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$ mit $r \in \mathbb{R}$	$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$
Normalenform		$E: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
Koordinatenform		$E: n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = b$ mit $b \in \mathbb{R}$

Winkel

zwischen zwei Geraden $\qquad \cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$

zwischen Gerade und Ebene $\qquad \sin(\alpha) = \dfrac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

zwischen zwei Ebenen $\qquad \cos(\alpha) = \dfrac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Abstand

zwischen zwei Punkten $\qquad d = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$

zwischen Punkt und Ebene $\qquad d = \left|\dfrac{(\vec{a} - \vec{p}) \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|}\right| = \left|\dfrac{n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 - b}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\right|$

Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Skalarmultiplikation

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen A und B können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von A mit der Zeilenanzahl von B übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$

Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad E \cdot A = A \cdot E = A$$

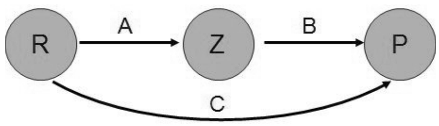
Inverse Matrix

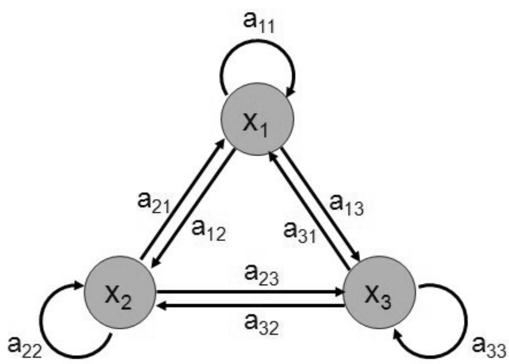
Für eine invertierbare Matrix A und ihre Inverse A^{-1} gilt $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Prozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

$\vec{r} = A \cdot \vec{z}$ $\qquad$ $\vec{z} = B \cdot \vec{p}$ $\qquad$ $\vec{r} = A \cdot B \cdot \vec{p} = C \cdot \vec{p}$





Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Aus Zustand $\vec{x}$ wird Zustand $\vec{y}$ $\qquad$ $A \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Stochastische Matrix $\qquad$ alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Stationärer Zustand $\vec{x}$ $\qquad$ $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Zyklischer Prozess $\qquad$ $A^k = E$ für ein k>1

Die Merkhilfe stellt keine Formelsammlung im klassischen Sinn dar. Bezeichnungen werden nicht vollständig erklärt und Voraussetzungen für die Gültigkeit der Formeln in der Regel nicht dargestellt.