ZSL

Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung Baden-Württemberg

Mathematik

Handreichung zur Einführung des Bildungsplans im Beruflichen Gymnasium ab Schuljahr 2021/2022

ZSL – 2021

Redaktionelle Bearbeitung

Redaktion	Carmen Kubik, Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung (ZSL)
Autor/in	Jürgen Kury, Carl-Helbing-Schule Emmendingen Dr. Sabine Reichenbach, Berufliches Schulzentrum Leonberg Stefanie Schütz, Mildred-Scheel-Schule Böblingen Ulla Sturm-Petrikat, Oskar-von-Nell-Breuning-Schule Rottweil Martina Wagner, Friedrich-List-Schule Ulm Thomas Weber, Carl-Engler-Schule Karlsruhe
Erscheinungsjahr	2021

Impressum

Herausgeber
Land Baden-Württemberg
vertreten durch das Zentrum für Schulqualität und Lehrerbildung (ZSL)
Interimsadresse:
Neckarstr. 207, 70190 Stuttgart
Telefon: 0711 21859-0
Telefax: 0711 21859-701
E-Mail: poststelle@zsl.kv.bwl.de
Internet: www.zsl.kultus-bw.de

Inhaltsverzeichnis

1 Vorbemerkungen

1.1 Intention der Handreichung

Die vorliegende Handreichung möchte die Kolleginnen und Kollegen dabei unterstützen, die neuen Bildungspläne für das Fach Mathematik an beruflichen Gymnasien umzusetzen. Die vorgestellten Unterrichtsbeispiele wurden von den in die Handreichungskommission berufenen Kolleginnen und Kollegen erarbeitet, diskutiert und redigiert. Deren unterschiedliche Schwerpunktsetzung und die verschiedenen unterrichtlichen Ansätze spiegeln sich in den Beiträgen wider.

Im Folgenden werden einige Besonderheiten im Aufbau der Bildungspläne erläutert und begründet. Um die Mathematiklehrkräfte für die Neuerungen zu sensibilisieren, schließen sich eine Gegenüberstellung der Bildungspläne mit dem bisherigen Lehrplan sowie ein Vergleich zwischen den Unterrichtsinhalten auf dem grundlegenden und auf dem erhöhten Anforderungsniveau an.

Anregungen zum Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge im Unterricht finden sich im zweiten Kapitel dieser Handreichung, aber auch in vielen der im Folgenden vorgestellten Aufgaben- und Unterrichtsideen.

Für diejenigen Bildungsplaneinheiten, die im Vergleich zum bisherigen Lehrplan neu sind oder die nun in der Eingangsklasse statt in der Jahrgangsstufe verortet sind, bietet Kapitel drei der Handreichung ausführliche Unterrichtsbeispiele. Darüber hinaus werden hier Aufgaben zum Problemlösen und zur regelmäßigen Wiederholung vorgestellt.

Im vierten Kapitel finden sich Anregungen für individualisierten Unterricht und Vertiefung.

1.2 Intention und Aufbau des neuen Bildungsplans

Die Neugestaltung der Bildungspläne für die beruflichen Gymnasien eröffnet die Chance, bewährte Strukturen weiterzuentwickeln und Neuerungen, wie sie unter anderem durch die Kultusministerkonferenz vorgegeben sind (s. Vereinbarung zur Gestaltung der gymnasialen Oberstufe und der Abiturprüfung: https://www.kmk.org/fileadmin/Dateien/veroeffentlichungen_beschluesse/1972/1972_07_07-VB-gymnasiale-Oberstufe-Abiturpruefung.pdf), aufzunehmen.

Die T-Struktur der Bildungspläne wurde beibehalten: In jeder Bildungsplaneinheit (BPE) werden in kursiver Schrift die übergeordneten Ziele beschrieben; die Tabellenköpfe darunter enthalten Zielformulierungen mit den zu erwerbenden Kompetenzen in den jeweiligen fachspezifischen Operatoren. Die zweispaltige Tabelle gewährleistet eine übersichtliche Darstellung der verbindlichen Inhalte in der linken Inhaltsspalte und deren Ergänzung in der rechten Hinweisspalte.

Im Vergleich zum alten Lehrplan ist die Inhaltsspalte ausführlicher, denn die neuen Bildungspläne weisen bereits im alten Lehrplan implizit enthaltene Inhalte explizit aus. Neu sind des Weitern übergeordnete Bildungsplaneinheiten wie Modellieren und Problemlösen, die eine Kompetenzorientierung des Mathematikunterrichts stärken sollen. Für die aktuellen Bildungspläne gilt ebenso wie für seine Vorgänger: Der Bildungsplan gibt nicht vor, in welcher Reihenfolge der Unterrichtsstoff innerhalb der

Eingangsklasse beziehungsweise innerhalb der Jahrgangsstufe zu bearbeiten ist. Für einige Bildungsplaneinheiten ist sogar ausdrücklich ein didaktisch geschicktes integratives Unterrichten vorgesehen. Vorschläge für eine mögliche Stoffanordnung finden sich an mehreren Stellen in dieser Handreichung.

Die Bildungspläne für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau sind parallel aufgebaut. Die Bildungsplaneinheiten 1 bis 7, die die Eingangsklasse betreffen, sind für beide Niveaus identisch. Ziel ist es, die Schülerinnen und Schüler, unter anderem durch entdeckendes und problemlöseorientiertes Lernen, durch Verwendung mathematischer Fach- und Symbolsprache sowie durch erste mathematische Beweisideen auf den Mathematikunterricht in der Jahrgangsstufe vorzubereiten. Im Laufe des ersten Schuljahrs am beruflichen Gymnasium müssen die Lernenden entscheiden, ob sie Mathematik in der Jahrgangsstufe auf grundlegendem oder auf erhöhtem Anforderungsniveau belegen möchten. Damit sie diese Entscheidung auch in Bezug auf die anstehenden Unterrichtsinhalte möglichst fundiert treffen können, greift der Bildungsplan wesentliche, für die Schülerinnen und Schüler neue Themen wie Vektorgeometrie und Differenzialrechnung bereits in der Eingangsklasse auf. Beispiele für die Umsetzung dieser Themen in der Eingangsklasse, die insbesondere auch die Intention des Lehrplans zum Ausdruck bringen, zeigt Kapitel 3.3 der Handreichung auf.

Legt man die Bildungspläne des grundlegenden und des erhöhten Anforderungsniveaus für die Jahrgangsstufe nebeneinander, so lassen sich zahlreiche inhaltliche Unterschiede und – anhand der Beispiele in der rechten Spalte – intendierte Niveauunterschiede ablesen. Im Vergleich zum bisherigen Lehrplan tritt aber vor allem die Lineare Algebra in veränderter Form auf: Für alle Schülerinnen und Schüler, die Mathematik auf dem grundlegenden Anforderungsniveau gewählt haben, ist künftig die Vektorgeometrie verbindlich. Diese Entscheidung wurde mit Blick auf die Hochschulen und mit dem Ziel, die Basis einheitlicher Vorkenntnisse bei Studienbeginn zu verbreitern, getroffen. Mathematikkurse auf dem erhöhten Anforderungsniveau weisen zukünftig einen Profilbezug auf. Dieser wird im Wesentlichen über das Thema „Matrizen“ hergestellt.

Auf erhöhtem Anforderungsniveau enthält der aktuelle Bildungsplan zudem neue Inhalte: Untersuchung von normalverteilten Zufallsgrößen und, für die Technischen Gymnasien, Beschreibung von elementargeometrischen Abbildungen mit Matrizen. Unterrichtsbeispiele dazu finden sich in Kapitel 3.4.

1.3 Alter Lehrplan und neuer Bildungsplan im Vergleich – eine Übersicht

Eingangsklasse

BILDUNGSPLAN ALT

Schuljahr	Lehrplaneinheiten	Zeitricht-wert	Gesamt-stunden
Eingangsklasse	Handlungsorientierte Themenbearbeitung (HOT)	20	
	1 Funktionen in Anwendungen und ihre Schaubilder, zugehörige Gleichungen	75	
	~~2 Stochastik I~~	25	120
	Zeit für Leistungsfeststellung und zur möglichen Vertiefung		40
			160

in die JGS verschoben

BILDUNGSPLAN NEU

Schuljahr	Bildungsplaneinheiten	Zeitricht-wert	Gesamt-stunden
Eingangsklasse	VIP (Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht)	40	40
	Zeit für die Leistungsfeststellung	20	20
	1 Vertiefung der Mathematik aus Sekundarstufe I	15	
	2 Potenzfunktionen und zugehörige Gleichungen	10	
	3 Polynomfunktionen und zugehörige Gleichungen	20	
	4 Exponentialfunktionen und zugehörige Gleichungen	20	
	5 Modellieren mit Funktionen und Problemlösen	10	
	6 Änderungsrate und grafisches Differenzieren	10	
	7 Vektorielle Geometrie – Grundlagen	15	100
			160

Mit „mathem. Arbeiten in der Oberstufe“

ohne trig. Funktionen

Jahrgangsstufen 1 und 2

BILDUNGSPLAN ALT

Schuljahr	Lehrplaneinheiten	Zeitricht-wert	Gesamt-stunden
Jahrgangsstufen 1 und 2	Handlungsorientierte Themenbearbeitung (HOT)	36	
	3 Analysis	75	
	4 Lineare Algebra	55	
	5 Stochastik II	30	
	6 Wahlthemen	20	216
	Zeit für Leistungsfeststellung und zur möglichen Vertiefung		72
			288

BILDUNGSPLAN NEU

Schuljahr	Bildungsplaneinheiten	Zeitricht-wert eN	Gesamt-Stunden eN	Zeitricht-wert gN	Gesamt-Stunden gN
Jahrgangsstufen 1 und 2	VIP (Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht)	90	90	72	72
	Zeit für die Leistungsfeststellung	45	45	36	36
	8 Problemlösen	10		10	
	9 Modellieren	10		10	
	10 Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen	15		15	
	11 Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen	5		5	
	12 Differenzial-rechnung	25		30	
	13 Integralrechnung	15		20	
	14 Aufstellen von Funktionstermen	5		5	
	15 Optimieren	15		10	
	16 Vektorielle Geometrie – Vertiefung	25		20	
	17 Stochastik	45		30	
	18 Lineare Gleichungssysteme	10		10	
	19 Matrizen (WG: Produktionsprozesse)	25			
	20 Matrizen (TG: Abbildungsmatrizen)	(25)			
	21 Matrizen (Sonstige: Übergangsprozesse)	(25)			
	22 Wahlgebiete	20	225	15	180
			360		288

aus der EK übernommen

zusätzlich formuliert

mit Stochastik I aus EK und Normalverteilung

neuer Aufbau, Profilbezug

1.4 Neu im Bildungsplan – Unterschiede grundlegendes und erhöhtes Niveau

Eingangsklasse

<table>
<tr><th>Bildungsplaneinheit</th><th>Beschreibung der Änderungen</th></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>BPE 1</td><td>Vertiefung der Mathematik aus Sekundarstufe I</td><td>15</td></tr>
<tr><td colspan="3">Die erste Bildungsplaneinheit umfasst Themen, die die Schülerinnen und Schüler in der Sekundarstufe I bereits kennen gelernt haben können, die jedoch im Verlauf der Eingangsklasse in unterschiedlichen Aspekten vertieft und erweitert werden. Dabei ist nicht nur an eine inhaltliche Vertiefung gedacht; vielmehr sollen die Schülerinnen und Schüler anhand bekannter Themen an das Arbeiten in der Sekundarstufe II herangeführt werden. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln eine Grundvorstellung mathematischer Begriffe, die es ihnen erlaubt, Inhalte zu verknüpfen und mathematische Aussagen selbstständig abzuleiten. Sie lernen an einzelnen Beispielen den Beweis als wesentliches Element der Mathematik kennen und erfahren so ein tieferes Verständnis mathematischer Inhalte.</td></tr>
</table>
</td><td>
Die BPE 1 dient der Vertiefung von Themen aus der Sek. I aber auch dem Heranführen an die Arbeitsweisen der Oberstufe, wie:
• selbständig mathematische Aussagen ableiten
• Beweise nachvollziehen

Die Einheit soll übers Jahr passend verteilt und nicht geschlossen unterrichtet werden.
</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>BPE 2.1</td><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler skizzieren Graphen von Potenzfunktionen. Sie ermitteln die Eigenschaften von Potenzfunktionen ausgehend von den Funktionstermen und Funktionsgraphen und erläutern den Stetigkeitsbegriff anschaulich anhand der Graphen von Potenzfunktionen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funktionstypen</td><td>z. B. Sektgläser, Schwingungsdauer Pendel, flächengleiche Rechtecke</td></tr>
<tr><td colspan="2">• $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>z. B. $f(x) = x^5$</td></tr>
<tr><td colspan="2">• $f(x) = x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>z. B. $f(x) = x^{-2}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">• $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$</td><td>z. B. $f(x) = x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Funktionsgraphen</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">• globales Verhalten: für $x \to \pm\infty$ gilt $f(x) \to ..$</td><td>z. B. in Abhängigkeit von a: $f(x) = a \cdot x^2$
waagerechte Asymptote: $f(x) = \frac{1}{x} + d$</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Verhalten bei Annäherung an die Definitionslücke</td><td>senkrechte Asymptote
anschauliche Einführung des Stetigkeitsbegriffs</td></tr>
<tr><td colspan="2">• Symmetrie:
zum Ursprung $f(-x) = -f(x)$,
zur y-Achse $f(-x) = f(x)$</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">• Definitions- und Wertebereich</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">• Stetigkeit</td><td>Zeichnen des Graphen ist ohne Absetzen des Stifts möglich</td></tr>
</table>
</td><td>
In diesem Bildungsplan wurde der Versuch unternommen, möglichst vollständig zu beschreiben, welche Kompetenzen (T-Kopf) die Schülerinnen und Schüler erreichen sollen. Dies geschieht mit den Inhalten der jeweiligen BPE (linke Spalte) wobei die notwendige Tiefe in der rechten Spalte beschrieben ist.

Dort tauchen auch Beispiele mit Parametern auf, deren Wert berechnet oder deren Wirkung auf ein Schaubild beschrieben werden soll.
</td></tr>
</table>

BPE 3.3 **Die Schülerinnen und Schüler bestimmen aus grafisch, tabellarisch oder verbal gegebenen Funktionseigenschaften einen geeigneten Ansatz und Bedingungen, die zur Ermittlung des Funktionsterms dienen. Ebenso ermitteln sie in geeigneten Fällen den Funktionsterm.** Aufstellen von Funktionstermen aus • Funktionsgraph • Text • Wertetabelle z. B. $f(x) = ax^4 + bx^2 + 2$ $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + ax^2 + bx$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)^2$	In der Eingangsklasse auftretende Gleichungssysteme sollen mit aus Sek. I bekannten Verfahren gelöst werden. Dies ist an den Beispielen erkennbar.
BPE 3.5 **Die Schülerinnen und Schüler deuten Polynomfunktionen und ihre Eigenschaften in einem gegebenen Sachzusammenhang, zum Beispiel aus der Wirtschaft, Technik oder Naturwissenschaft. Sie ermitteln Polynomfunktionen zur Darstellung einfacher Optimierungsprobleme und interpretieren Wertetabellen, Funktionsgraphen und Funktionsterme zur Lösung dieser Probleme.**	Es tauchen bereits Optimierungsprobleme auf, die aber grafisch oder mit Hilfe der Wertetabelle gelöst werden, wenn der Grad der Zielfunktion größer zwei ist.
BPE 6 **Änderungsrate und grafisches Differenzieren** **10** *Die Bildungsplaneinheit dient der vorbereitenden Begriffsbildung für die Differenzialrechnung in den Jahrgangsstufen. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln handlungsorientiert eine grundsätzliche Vorstellung der Begriffe momentane und durchschnittliche Änderungsrate. Sie erweitern ihre Modellierungs- und Problemlösekompetenz, indem sie Realsituationen mathematisch durch den Begriff der Änderungsrate aus einem weiteren Blickwinkel untersuchen und beschreiben können. Abschließend lernen die Schülerinnen und Schüler erste Zusammenhänge der Graphen von Funktion und Steigung kennen und formulieren davon ausgehend erste Hypothesen über den algebraischen Zusammenhang.*	BPE 6 „**Änderungsrate und grafisches Ableiten** „ steht neu im Bildungsplan der Eingangsklasse. Der Schwerpunkt liegt auf der anschaulichen Bedeutung der Ableitung und dem Bilden von Hypothesen. Die Einheit soll auf die Denkweise in J1 vorbereiten.
BPE 7 **Vektorielle Geometrie – Grundlagen** **15** *Die Schülerinnen und Schüler lernen Vektoren als geeignetes Hilfsmittel zur Beschreibung geometrischer Objekte in der Ebene und im Raum kennen. Sie erweitern ihr räumliches Vorstellungsvermögen und machen sich mit der vektoriellen Schreibweise vertraut. Sie nutzen die Vektorrechnung als effektives Werkzeug zur analytischen Behandlung geometrischer Fragestellungen und stellen fachübergreifende Verbindungen her.*	BPE 7 „**Vektorielle Geometrie – Grundlagen**“ ist neu in der Eingangsklasse. Es sollen Grundlagen im Umgang mit Vektoren im dreidimensionalen Raum gelegt werden.
	Die Einheiten Trigonometrische Funktionen und Stochastik I sowie das Thema „Umkehrfunktion“ finden sich jetzt in J1 bzw. J2.

Jahrgangsstufe 1 und 2

<table>
<tr><th>Bildungsplaneinheit</th><th colspan="2">Beschreibung der Änderungen</th></tr>
<tr><td>Analysis</td><td>Erhöhtes Niveau</td><td>Grundlegendes Niveau</td></tr>
<tr><td>BPE 8 | Problemlösen | 10
Bei der Behandlung neuer und unbekannter Fragestellungen lernen Schülerinnen und Schüler Problemlösestrategien kennen und wenden diese an. Dies erfolgt integrativ, über alle inhaltlichen Themenbereiche (Bildungsplaneinheiten) hinweg, sodass die Schülerinnen und Schüler sukzessive mit den Methoden mathematischen Problemlösens vertraut werden. Dazu werden Lerngelegenheiten mit offenen Aufgaben (Problemaufgaben) geschaffen, in denen die Schülerinnen und Schüler eigenständig einen Lösungsplan entwickeln und umsetzen. Sie verwenden dabei unterschiedliche Hilfsmittel und Problemlösestrategien. Sie reflektieren und diskutieren ihr Vorgehen und dokumentieren ihre Gedanken. Dadurch erhalten sie einen Einblick in das Wesen der Mathematik.</td><td colspan="2">BPE 8 ist in Gänze neu im Bildungsplan. Problemlöseaufgaben sollen verteilt über die zwei Jahre an geeigneten Stellen gestellt werden. Durch den wiederholten Umgang mit diesen neuen Aufgabenformaten und ihren Lösungsstrategien gewinnen die Schülerinnen und Schüler die notwendige Sicherheit.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">BPE 10 | Trigonometrische Funktionen und zugehörige Gleichungen | 15
Die Schülerinnen und Schüler definieren den Sinus und den Kosinus eines Winkels am Einheitskreis und erweitern damit ihre Kenntnisse der Trigonometrie. Sie entdecken die trigonometrischen Funktionen zur Mathematisierung periodischer Vorgänge und lernen die Eigenschaften der allgemeinen Sinus- bzw. Kosinusfunktion kennen. Darüber hinaus übertragen die Schülerinnen und Schüler bekannte Lösungsstrategien auf trigonometrische Gleichungen.</td><td>Transformationen Reihenfolge an Beispielen der Form $f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big)+d$</td><td>Transformationen Reihenfolge an Beispielen der Form $f(x) = a\sin(x-c)+d$ oder $f(x) = a\sin(bx)+d$</td></tr>
<tr><td>Bestimmen von Funktionstermen $f(x) = a\sin\big(b(x-c)\big)+d$
Extrempunkte, Schnitt mit Mittellinie</td><td>Bestimmen von Funktionstermen $f(x) = a\sin(bx)+d$</td></tr>
<tr><td>Lösen von Gleichungen
zum Beispiel $0 = \cos(2x+3)$
Darstellung unendlich vieler Lösungen</td><td>Lösen von Gleichungen ohne Verschiebung in x-Richtung zum Beispiel $0 = \cos(2x)$</td></tr>
<tr><td>BPE 11 | Verknüpfung, Verkettung und Umkehrung von Funktionen | 5
Die Schülerinnen und Schüler verknüpfen bisher bekannte Funktionen mittels Addition und Multiplikation und erweitern damit sowohl ihre Vorstellung von Rechenoperationen als auch ihr Repertoire an Funktionen. Sie wiederholen die Eigenschaften der bekannten Funktionen und übertragen ihre Strategien zur Funktionsuntersuchung, um exemplarisch die Eigenschaften von Summen- beziehungsweise Produktfunktionen zu ermitteln~~. Außerdem lernen die Schülerinnen und Schüler die Verkettung sowie die Umkehrung von Funktionen kennen und machen Erfahrungen mit dem Konzept der Umkehrfunktion.~~</td><td>Die Inhalte von BPE 11 verkettete Funktionen und die Umkehrfunktion waren im alten Lehrplan in der Eingangs-</td><td>Verkettete Funktionen werden nur mit linearer innerer Verkettung behandelt, und die Umkehrfunktion fällt</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>klasse implizit enthalten, sie werden hier ausführlich formuliert.</td><td>weg. Inhalte, die im grundlegenden Niveau entfallen, werden hier im Text des erhöhten Niveaus gestrichen.</td></tr>
<tr><td>BPE 12.3 | Die Schülerinnen und Schüler wenden die Ableitungsregeln für zusammengesetzte Funktionen an und nutzen Kombinationen dieser Regeln in einfachen Fällen.</td><td>Allgemeine Ableitungsregeln

Neu: Ableitung von $f(x) = \ln(x)$ ist $f'(x) = \frac{1}{x}$</td><td>Allgemeine Ableitungsregeln

Kettenregel nur mit linearer innerer Funktion</td></tr>
<tr><td>BPE 12.4 | Die Schülerinnen und Schüler skizzieren den Graph einer Funktion aus der Kenntnis des Graphs der Ableitungsfunktion und erläutern den Zusammenhang beider Graphen. Sie begründen die Nicht-Eindeutigkeit der Stammfunktion. Darüber hinaus bestimmen sie Stammfunktionen von Grundfunktionen, deren Linearkombination und deren lineare Verkettung und wenden Ableitungsregeln zur Überprüfung an. ~~Die Schülerinnen und Schüler nutzen die ln-Funktion als Stammfunktion von $x \to \frac{1}{x}$.~~</td><td>Stammfunktionen

(zusätzlich $\ln(x)$ als Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x}$)</td><td>Stammfunktionen</td></tr>
<tr><td>BPE 12.5 | Die Schülerinnen und Schüler bestimmen eine Gleichung der Tangente in einem gegebenen Punkt eines Funktionsgraphen. Sie prüfen, ob eine gegebene Gerade Tangente an einen Funktionsgraphen ist.</td><td colspan="2">In BPE 12.5 wird in beiden Niveaus nur die Tangente in einem Kurvenpunkt verlangt. Es entfallen die Normale und die Tangente von außen.</td></tr>
<tr><td>BPE 13.1 | Die Schülerinnen und Schüler deuten das bestimmte Integral als rekonstruierten Bestand sowie als Flächeninhalt zwischen Funktionsgraph und x-Achse. Sie ermitteln den Wert bestimmter Integrale mittels Flächenzerlegung näherungsweise und ~~nutzen den propädeutischen Grenzwertbegriff beim Übergang von Unter- und Obersummen zum bestimmten Integral~~. Schließlich interpretieren die Schülerinnen und Schüler den Wert eines bestimmten Integrals als Bilanz orientierter Flächeninhalte und erläutern die Eigenschaften des bestimmten Integrals.</td><td>In BPE 13.1 wird die näherungsweise Berechnung von Integralen mit Grenzwertbildung behandelt.

Hier sind explizit die Ober- und Untersumme mit Summenschreibweise sowie das Bestimmte Integral als Grenzwert einer Summe formuliert.</td><td>In BPE 13.1 wird nur die näherungsweise Berechnung von Integralen ohne Grenzwertbildung verlangt.</td></tr>
<tr><td>~~BPE 13.3~~ | ~~Die Schülerinnen und Schüler berechnen Flächeninhalte und Volumen von Körpern, die durch Rotation um die x-Achse entstehen, auch im Kontext der Anwendung. Sie weisen elementargeometrische Volumenformeln nach.~~</td><td>Es werden nur Volumina, die durch Rotation um die x-</td><td>Es wird keine Volumenberechnung</td></tr>
</table>

	Achse entstehen berechnet.	verlangt.
BPE 15.1 – **Die Schülerinnen und Schüler beschreiben auf der Grundlage ihrer Kenntnisse aus der Elementargeometrie, der Analysis, ~~der Vektorgeometrie sowie der Stochastik~~ Optimierungsaufgaben mathematisch und bestimmen die Lösungen dieser mit Hilfe unterschiedlicher Lösungsstrategien. Sie beurteilen Lösungsansätze, interpretieren den Gültigkeitsbereich ihrer mathematischen Beschreibung und erläutern das Vorgehen zur Lösung von Optimierungsproblemen in unterschiedlichen Kontexten.**	In der BPE 15 ist auch **Optimierung an Funktionsgrafen** enthalten. In Gänze **neu** sind **Optimierungsaufgaben aus Stochastik und Vektorgeometrie.**	Die BPE 15 beschränkt sich auf die **Optimierung an Funktionsgrafen** und die **anwendungsorientierte Optimierung.**

Bildungsplaneinheit	**Beschreibung der Änderungen**	
Vektorgeometrie	**Erhöhtes Niveau**	**Grundlegendes Niveau**
BPE 16.3 – **Die Schülerinnen und Schüler ermitteln einen Normalenvektor und deuten diesen geometrisch als einen Vektor, der zu zwei Spannvektoren einer Ebene orthogonal ist. Sie *nutzen* zur Beschreibung einer Ebene verschiedene Darstellungsformen und ermitteln Ebenengleichungen aus Punkten und Geraden.** Darstellung von Ebenen • Parameterform ~~• Koordinatenform~~ — ~~Normalenform, Achsenabschnittsform~~	Nur die **Parameterform und Koordinatenform** der Ebenengeichung sind verbindlich.	Nur die **Parameterform** der Ebenengeichung ist verbindlich.
BPE 16.6 – Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Abstände und berechnen Volumen von elementaren geometrischen Objekten im Raum. **BPE 16.4** – Die Schülerinnen und Schüler bestimmen Abstände und berechnen Volumen von elementaren geometrischen Objekten im Raum.	*BPE16.6* Bei den Abstandsproblemen **entfällt** der **Abstand windschiefer Geraden**.	*BPE16.4* Es werden nur Abstände **zwischen Punkten, Punkt und Gerade und Punkt und Koordinatenebene** berechnet. Es werden nur Volumina für **Quader und Pyramiden mit der Grundfläche in einer Koordinatenebene** verlangt.

	Der **Schnittwinkel zwischen Geraden und Ebenen** sowie **zwischen zwei Ebenen** entfällt. Ausnahme ist der Schnittwinkel zwischen Geraden und Koordinatenebenen s. BPE 16.1.

Bildungsplaneinheit	**Beschreibung der Änderungen**	
Stochastik	**Erhöhtes Niveau**	**Grundlegendes Niveau**
BPE 17.9 **Die Schülerinnen und Schüler nennen Beispiele für diskrete und stetige Zufallsgrößen. Sie untersuchen stochastische Situationen, die zu annähernd normalverteilten Zufallsgrößen führen. Weiterhin nennen sie die Bedeutung der Parameter μ und σ im Anwendungskontext sowie für den Graph der Dichtefunktion und geben deren Funktionsterm an. Sie berechnen Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen und interpretieren diese als Fläche unter dem Graph der Dichtefunktion.**	Die Inhalte von BPE 17 Stochastik waren, mit Ausnahme 17.8 und 17.9, im alten Lehrplan implizit enthalten. Sie werden hier detaillierter ausformuliert. **Neu hinzu** kommt die **Normalverteilung**.	Hier werden **Normalverteilung, Sigma-Regeln und Konfidenzintervalle nicht verlangt.**

Bildungsplaneinheit	**Beschreibung der Änderungen**	
Matrizen	**Erhöhtes Niveau**	**Grundlegendes Niveau**
BPE 19* **WG: Beschreibung von Produktionsprozessen durch Matrizen** **25** *Die Schülerinnen und Schüler lernen Sachverhalte aus den Anwendungsbereichen der Wirtschaftswissenschaften mit Matrizen und Vektoren darzustellen. Dabei wenden sie die Matrizenmultiplikation und die Invertierung von Matrizen an. Im Mittelpunkt stehen hierbei Modellierungsprozesse und die Entwicklung verschiedener Lösungsstrategien und keine aufwändigen Berechnungen.* **BPE 20*** **TG: Beschreibung von Abbildungen mit Matrizen** **25** *Die Schülerinnen und Schüler beschreiben elementargeometrische Abbildungen in der Ebene mit Mitteln der linearen Algebra. Sie verwenden Matrizen und Vektoren zur Bestimmung der Koordinaten von Bildobjekten und erkennen den Zusammenhang geometrischer Sachverhalte mit den zugehörigen Strukturen der Matrizenrechnung.* **BPE 21*** **AG, BTG, EG, SGG: Beschreibung von Austausch- und Populationsprozessen durch Matrizen** **25** *Die Schülerinnen und Schüler stellen Sachverhalte aus Anwendungsbereichen, beispielsweise aus der Soziologie und der Biologie, mit Matrizen und Vektoren dar. Sie verwenden Matrizen zur Modellierung von Zustandsänderungen bei Übergangs- und Populationsprozessen. Die Schülerinnen und Schüler erkennen die Bedeutung der Matrizenrechnung für die Vorhersage langfristiger Entwicklungen in Natur und Gesellschaft.*	Die Inhalte der BPE 19, 20 und 21 Matrizen werden profilbezogen unterrichtet, wobei in allen Profilen der gleiche Grundstock der Rechenoperationen mit Matrizen enthalten ist.	Keine Behandlung des Themas **Matrizen**.

2 Einsatzmöglichkeiten von digitalen Medien im Unterricht

2.1 Unterrichtsbeispiele

„Die Entwicklung mathematischer Kompetenzen wird durch den sinnvollen Einsatz digitaler Mathematikwerkzeuge unterstützt. Das Potenzial dieser Werkzeuge entfaltet sich im Mathematikunterricht

- beim **Entdecken** mathematischer Zusammenhänge, insbesondere durch interaktive Erkundungen beim Modellieren und Problemlösen,
- durch **Verständnisförderung** für mathematische Zusammenhänge, nicht zuletzt mittels vielfältiger Darstellungsmöglichkeiten,
- mit der **Reduktion** schematischer Abläufe und der Verarbeitung größerer **Datenmengen**,
- durch die Unterstützung individueller Präferenzen und Zugänge beim Bearbeiten von Aufgaben einschließlich der reflektierten Nutzung von **Kontrollmöglichkeiten**.“

[Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland (Hrsg.), Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife – Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 18.12.2012. Berlin. S. 13.]

Diese vier in den Bildungsstandards im Fach Mathematik für die Allgemeine Hochschulreife genannten Einsatzmöglichkeiten digitaler Werkzeuge sollen im Folgenden anhand von Unterrichtsbeispielen illustriert werden.

2.1.1 ENTDECKEN MATHEMATISCHER ZUSAMMENHÄNGE

Bildungsplaneinheit 2.2 sieht vor, dass Schülerinnen und Schüler Transformationen von Potenzfunktionen durchführen und dabei zwischen den Darstellungsarten Term, Text und Graf wechseln. Das exemplarisch mit dem Ausschnitt aus einem Expertenauftrag vorgestellte Gruppenpuzzle erlaubt den Lernenden unter Nutzung der Mathematiksoftware GeoGebra, die bestehenden Zusammenhänge eigenständig zu entdecken.

Mathematik Gruppenpuzzle

Verschieben, Strecken, Spiegeln

Expertengruppe I **Zeit: 20 Minuten**

Aufgabe 1

Gegeben: $f(x) = (x - c)^2$ $k(x) = \sqrt{x - c}$

Beschreiben Sie, wie sich die zugehörigen Schaubilder K_f und K_k verändern, wenn für c unterschiedliche Zahlen eingesetzt werden. Beachten Sie auch, was für negative c passiert.

Starten Sie den GeoGebra Grafikrechner. Geben Sie einen Funktionsterm ein - bestätigen mit Return. GeoGebra erstellt einen Schieberegler für c. Bewegen Sie diesen mit dem Finger.

Aufgabe 2

Gegeben: $h(x) = x^2$ mit Schaubild K_h.

Das Schaubild K_g entsteht durch Verschiebung von K_h

(siehe Anhang)

Zudem üben die Schülerinnen und Schüler, die gewonnenen Erkenntnisse unter Verwendung der Fachsprache zu formulieren. Im Rahmen der Stammgruppenarbeit tauschen die Experten ihre Erkenntnisse aus und wenden sie auf Aufgaben, die das Wissen aller Experten erfordern, an. Zusätzlich erarbeiten sich die Schülerinnen und Schüler nun, inwiefern die Reihenfolge der Transformationen das Ergebnis beeinflusst.

2.1.2 VERSTÄNDNISFÖRDERUNG FÜR MATHEMATISCHE ZUSAMMENHÄNGE

In der Sekundarstufe I haben die Schülerinnen und Schüler gelernt, quadratische Gleichungen rechnerisch zu lösen und sich die Lösungsvielfalt dieser Gleichungen anhand möglicher Nullstellen von Parabeln zu veranschaulichen. In der Eingangsklasse werden die Lernenden erstmals in Bildungsplaneinheit 2 mit Gleichungen konfrontiert, die vier Lösungen haben können. Die Veranschaulichung der jetzt größeren Lösungsvielfalt mit einem digitalen Mathematikwerkzeug ist äußerst hilfreich und motivierend.

Aufgabe:

a) Berechnen Sie mithilfe der Substitution $x^2 = z$ die Lösungen der sogenannten biquadratischen Gleichung $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

b) Fassen Sie die linke Seite der Gleichung als Funktionsterm einer Funktion vom Grad 4 auf und erzeugen Sie mit Hilfe des Ihnen zur Verfügung stehenden DMW den Grafen der Funktion. Lesen Sie die Nullstellen ab und vergleichen Sie mit Ihren Lösungen.

c) Lösen Sie wie in a) die Gleichung $x^4 - x^2 - 2 = 0$. Wie könnte das Schaubild in diesem Fall aussehen? Skizzieren Sie Ihre Vermutung und vergleichen Sie diese mit dem Schaubild, das Ihnen Ihr DMW zeigt.

d) Verändern Sie die Gleichung aus c) so, dass sie keine Lösung hat. Überprüfen Sie dies, indem Sie diese Gleichung rechnerisch lösen.

e) Kann man die Gleichung aus b) auch so verändern, dass sie 3 oder nur eine Lösung hat?

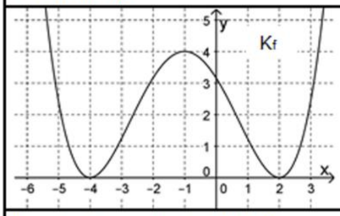
2.1.3 REDUKTION SCHEMATISCHER ABLÄUFE

Das ausschnittsweise vorgestellte Arbeitsblatt kann im Rahmen von Bildungsplaneinheit 14, Aufstellen von Funktionstermen, in einer schüleraktiven Übungsphase eingesetzt werden.

In der Tabelle finden Sie 7 Beschreibungen von **Polynomfunktionen 4. Grades**.
Falls eine Funktion existiert, auf die die Beschreibung passt, bestimmen Sie deren Term.

- Entscheiden Sie zunächst, welcher Ansatz angesichts der gegebenen Informationen am geschicktesten ist, d.h. den geringsten Rechenaufwand erfordert.
- Stellen Sie die Bedingungen auf.
- Lösen Sie das LGS mit GeoGebra. Eine Hilfestellung finden Sie in der Sprechblase.
- Prüfen Sie, ob die gefundene Funktion tatsächlich alle Bedingungen erfüllt.

Öffnen Sie den GeoGebra **CAS Rechner**. Tippen Sie den Ansatz, z.B. $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3$ (mit Malpunkten) Bestätigen mit Return. Zur Lösung des LGS schreiben Sie „löse" und wählen Sie [Liste von Gleichungen, Liste von Variablen]. Eingabe mit geschweiften Klammern und Komma, z.B. löse [{f(1) = 5, f`(-1) = 1} , {a , b}]

Beschreibung	**Ansatz und Bedingungen**	**Funktionsterm (sofern möglich)**
		
Der Graph von g hat in W(4|2) einen Wendepunkt mit waagrechter Tangente		

(siehe Anhang)

Es setzt voraus, dass die Vorgehensweise zum Aufstellen von Funktionstermen inklusive der Lösung von Linearen Gleichungssystemen bereits besprochen wurde. Die Lernenden üben, aus verschiedenen Vorgaben einen geschickten Ansatz und geeignete Bedingungen zur Ermittlung des Funktionsterms zu finden, ohne sich dabei in aufwendigen Rechnungen zu verlieren. Der mit einem Computer-Algebra-System (CAS) bestimmte Funktionsterm dient zur Selbstkontrolle.

2.1.4 NUTZUNG VON KONTROLLMÖGLICHKEITEN

Dem Validieren, laut Duden *die Wichtigkeit, die Gültigkeit, den Wert von etwas feststellen, bestimmen*, kommt im Mathematikunterricht eine überragende Bedeutung zu. Jedes Ergebnis sollte auf seine Richtigkeit oder Gültigkeit überprüft werden und, wo das nicht nötig oder möglich ist, auf seine Plausibilität. Dies geschieht im Allgemeinen mit der „Probe“. Diese aber ist zum einen manchmal langwierig und daher bei den Lernenden unbeliebt, zum anderen kann man sich bei ihrer Durchführung wieder verrechnen. Hier bieten digitale Mathematikwerkzeuge einen unschätzbaren Komfort, der unter anderem dazu führt, dass viele Schülerinnen und Schüler zu der Erkenntnis kommen, dass eine Aufgabe erst vollständig gelöst ist, wenn das Ergebnis validiert wurde. Ein Beispiel aus der Jahrgangsstufe, Bildungsplaneinheit 14:

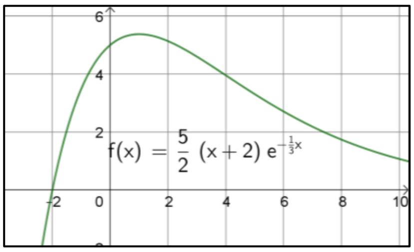
Was ist falsch?

In der folgenden Aufgabe hat sich der Fehlerteufel eingeschlichen. Finden Sie den Fehler und schreiben Sie die Aufgabe um!

Aufgabe: Bestimmen Sie die Exponentialfunktion der Form $f(x) = a(x+b)e^{kx}$. Ihr Graf schneidet die x-Achse bei $x = -2$ und die y-Achse in $P(0\|5)$. An der Stelle $x = 1$ hat er einen Tiefpunkt.

Die Lernenden bestimmen händisch den korrekten Funktionsterm $f(x) = \frac{5}{2}(x+2)e^{-\frac{1}{3}x}$.

Zeichnen sie dann zur Validierung ihres Ergebnisses den zugehörigen Grafen mit einem digitalen Mathematikwerkzeug, so erhalten sie das Schaubild:



Dies erzeugt

a) Verwunderung.

b) Motivation, mit dem Term zu spielen, sodass der Graf einen Tiefpunkt hat, oder Motivation, im Aufgabentext das Wort Tiefpunkt durch Hochpunkt zu ersetzen.

c) Motivation zu ergründen, warum aus richtig aufgestellten Gleichungen ein „falsches“ Ergebnis resultiert.

d) Motivation, **jedes** Ergebnis zu überprüfen.

2.2 Operationen mit digitalen Werkzeugen

Vorliegende Liste stellt allgemeine Operationen beim Einsatz von digitalen Mathematikwerkzeugen vor, wie sie Lernende während ihres Mathematikunterrichts erwerben sollten. Sie gibt darüber hinaus eine Orientierung für die Lehrkraft bei der Auswahl eines Programms bzw. einer App. Viele Operationen, wie beispielsweise der Betrag einer Zahl oder der Befehl zur Eingabe der Wurzel, folgen unmittelbar aus den Inhalten des Bildungsplans und wurden hier nicht mehr explizit aufgenommen.

Grundlegend
Dateien speichern, aufrufen und teilen
Screenshots exportieren
Prüfungsmodus aktivieren
Präsentieren von Inhalten

Algebra
Lösen von Gleichungen, Formeln umstellen
Lösen von Gleichungssystemen
Termumformungen, z. B. Multiplizieren/Faktorisieren von Termen
Variablen Werte zuweisen

Analysis
Zeichnen von Funktionsgrafen • Eingeben von Funktionstermen • Variieren von Fensterausschnitten • Skalierung des Koordinatensystems • Einschränkung des Definitionsbereichs
Elementare Zeichenoperationen wie z. B. • Punkte, Schnittpunkte • Tangenten • Strecken • Winkel • Polygone • …
Bestimmen von charakteristischen Punkten eines Grafen
Schieberegler erstellen und verwenden
Erstellen von Wertetabellen
Numerisches und algebraisches Differenzieren
Numerisches und algebraisches Integrieren
Verwenden von Regressionsbefehlen

Stochastik
Simulation von Zufallsexperimenten
Berechnungen mit und Darstellen von Verteilungsfunktionen • Binomialverteilungen • Normalverteilungen (nur eN)

Lineare Algebra analytische Geometrie
Editieren von Matrizen (nur eN)
Matrixoperationen (nur eN) • Matrizenaddition • skalare Multiplikation • Matrizenmultiplikation
Diagonalmatrix/Inverse Matrix (nur eN)
Lösen von Matrizengleichungen (nur eN)
Punkte im R^3 zeichnen
Vektoren zeichnen
Vektoroperationen • Addition • skalare Multiplikation • Skalarprodukt • Vektorprodukt (nur eN)
Geraden darstellen
Ebenen darstellen
Objekte schneiden

3 Umsetzungsbeispiele

3.1 Exemplarische Jahresplanung in der Eingangsklasse

Das folgende Beispiel einer Jahresplanung für die Eingangsklasse weist jene 100 Unterrichtsstunden aus, die in den Bildungsplänen für das grundlegende und das erhöhte Anforderungsniveau den Bildungsplaneinheiten 1 bis 7 zugeordnet sind. Zusätzlich stehen 40 Unterrichtsstunden für Vertiefung, individualisiertes Lernen sowie Projektunterricht (VIP) und 20 Unterrichtsstunden zur Vorbereitung, Durchführung und Nachbesprechung von Leistungsfeststellungen zur Verfügung.

Die Reihenfolge, in der die Lehrkraft die in den Bildungsplänen genannten Themen im Unterricht behandelt, kann frei gewählt werden. Die exemplarische Jahresplanung schlägt vor, die Bildungsplaneinheiten 6 und 7, Änderungsrate und grafisches Differenzieren sowie Vektorielle Geometrie – Grundlagen, zu Beginn des zweiten Schulhalbjahres zu bearbeiten. Zum einen nehmen die Schülerinnen und Schüler dadurch Einblick in die Mathematik in den Jahrgangsstufen, bevor sie sich für den Kurs auf grundlegendem beziehungsweise auf erhöhtem Anforderungsniveau entscheiden. Zum Zweiten erlaubt die frühzeitige Betrachtung des Ableitungsbegriffs, die Euler'sche Zahl im Kontext der Differenzialrechnung einzuführen. Bildungsplaneinheit 5, Modellieren mit Funktionen und Problemlösen, soll integrativ unterrichtet werden. Die zehn dafür vorgesehenen Unterrichtsstunden finden sich in der vorliegenden Jahresplanung verteilt auf vier Themen (vgl. rechte Spalte).

Stundenzahl	**Themen**	**Bildungsplaneinheiten/Kommentare**
4	Funktionsbegriff Darstellungsformen: Graf, Term, Tabelle, Text Definitions- und Wertebereich einer Funktion Zahlenmengen: Mengen- und Intervallschreibweise	1.1 – 1.3
3	Mathematische Fachsprache und Symbolschreibweise im Kontext der Funktionsdarstellung	1.3
6	Vertiefung linearer Funktionen/Geraden Beweis der Orthogonalitätsbedingung	1.4
4	Modellieren mit linearen Funktionen, Modellierungskreislauf Lineare Funktionen im Anwendungskontext Lösung linearer Ungleichungen und grafische Interpretation	1.4 und 5 (4 von 10 ausgewiesenen Std.)
2	Rechnen mit Potenzen Potenzen mit rationalen Exponenten, n-te Wurzel	1.5
4	Potenzfunktionen und ihre Grafen: Überblick und Definition für alle in der BPE 2.1 genannten Funktionstypen Globales Verhalten, Definitions- und Wertebereich Insbesondere bei Potenzfunktionen mit negativem Exponent:	2.1, auch 1.1 – 1.3

	Verhalten bei Annäherung an die Definitionslücke, Asymptoten, Stetigkeit	
4	Verschieben, Strecken, Spiegeln von Grafen der Potenzfunktionen Einfluss auf die Eigenschaften der Funktionen und ihrer Grafen	2.2
2	Lösen von Potenzgleichungen und grafische Interpretation der Lösung(en)	2.3
4	Definition von Polynomfunktion n-ten Grades Globalverhalten, Symmetrie	3.1 und 3.2
5	Lösung von Polynomgleichungen Grafische Interpretation als Schnittstelle(n) zweier Funktionen	3.4
3	Gemeinsame Punkte der Grafen von Polynomfunktionen mit den Koordinatenachsen, Vielfachheit von Nullstellen	3.2, 3.1 und 3.4
2	Wechsel zwischen allgemeiner Form, Produktform, ggf. Scheitelform der Parabel	3.1
2	Skizzieren von Grafen aufgrund der am Funktionsterm ersichtlichen Funktionseigenschaften	3.1 – 3.4
2	Bestimmen von Funktionstermen von Polynomfunktionen	3.3
5	Modellieren mit Polynomfunktionen, auch Regression Bestimmen von Zielfunktionen für einfache Optimierungsprobleme und grafische/tabellarische Auswertung quadratische Ungleichungen	3.5 und 5 (3 von 10 ausgewiesenen Std.) Lösung quadratischer Ungleichungen mit Hilfe des Funktionsgrafen
3	Durchschnittliche Änderungsrate Sekantensteigung Interpretation im Sachzusammenhang	6.1 und 6.2
2	Momentane Änderungsrate Tangentensteigung Interpretation im Sachzusammenhang	6.1 und 6.2
5	Ermitteln der Grafen von Ableitungsfunktionen Begründung des Zusammenhangs zwischen dem Grafen einer Funktion und dem Grafen ihrer Ableitungsfunktion	6.3
3	Punkte und Vektoren in der Ebene Rechnen mit Vektoren und geometrische Bedeutung	7.1 und 7.2
6	Punkte und Vektoren im Raum Koordinatensystem, Koordinatenebenen, grafische Darstel-	7.1 und 7.2 Übertragen der im

	lung	zweidimensionalen gewonnenen Einsichten auf die dreidimensionale Betrachtung
3	Skalarprodukt Winkel zwischen Vektoren	7.3
3	Untersuchung geometrischer Objekte in Ebene und Raum	7.3
3	Lineares vs. exponentielles Wachstum Vergleich der Wachstumsmodelle	4.6 und 5 (1 von 10 ausgewiesenen Std.)
3	Definition der Exponentialfunktion (beliebige Basen) Eigenschaften der Exponentialfunktion: Globalverhalten, Monotonie, gemeinsamer Punkt mit y-Achse	4.1 und 4.3
3	„Entdecken“ der natürlichen Exponentialfunktion Euler'sche Zahl Eigenschaften der natürlichen Exponentialfunktion Wechsel der Basis allgemeine vs. natürliche Exponentialfunktion	4.1 und 4.3 im Kontext der Differenzialrechnung
3	Verschieben, Strecken, Spiegeln der Grafen von Exponentialfunktionen. Einfluss auf die Eigenschaften, insbesondere Asymptote	4.2
4	Exponentialgleichungen und Logarithmus, grafische Interpretation	4.5
3	Bestimmen von Funktionstermen von Exponentialfunktionen.	4.4
4	Anwendungsaufgaben mit Exponentialfunktionen, auch beschränktes Wachstum	4.6, 4.4, 5 (2 von 10 ausgewiesenen Stunden) sowie 6.4

3.2 Umsetzungsbeispiele für jahrgangsübergreifende Aspekte

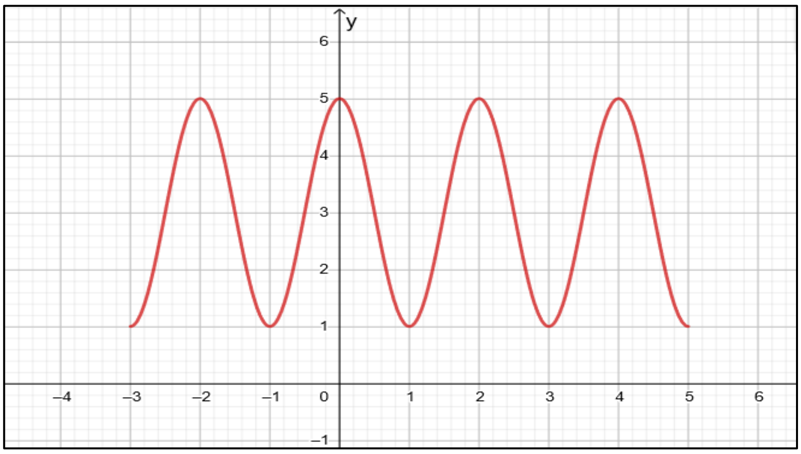
3.2.1 PROBLEMLÖSEN (BPE 8)

Probleme mathematisch lösen ist eine der sechs mathematischen Kompetenzen, die im Mathematikunterricht gefördert werden soll. Durch das Bearbeiten von problemorientierten Aufgaben in einem konstruktiv unterstützenden Unterrichtssetting erhalten die Schülerinnen und Schüler die Möglichkeit, Durchhaltevermögen und Kreativität zu entwickeln.

Die Schülerinnen und Schüler werden schon in der Eingangsklasse an das Problemlösen herangeführt. Im Folgenden finden sich exemplarisch einige Anregungen sowohl für die Eingangsklasse als auch die Jahrgangsstufen.

Aufgabe zu Definitions- und Wertemenge (EK)

a) Gegeben ist das Schaubild einer Funktion f. Lesen Sie daraus Definitions- und Wertemenge ab und geben diese in Intervallschreibweise an.



b) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2$ mit $x \in D$. Geben Sie die maximale Definitions- und zugehörige Wertemenge an.

c) Suchen Sie zwei Funktionen mit folgender Definitions- bzw. Wertemenge: $D = [0; \infty[$ und $W = [-2; \infty[$. Dokumentieren Sie Ihre Gedankengänge so, dass sie nachvollziehbar sind.

Aufgabe zu Symmetrie (EK)

Erläutern Sie den Begriff der Symmetrie bei Polynomfunktionen an selbst gewählten Beispielen. Verwenden Sie dazu verschiedene Darstellungsmöglichkeiten (Text, Tabelle, Schaubilder bzw. Term).

Aufgabe zu orthogonalen Geraden (EK)

Die Aufgabe dient dazu, die Schülerinnen und Schüler die gegenseitige Lage von Geraden im Koordinatensystem, insbesondere die Orthogonalität, ohne weiteres Vorwissen entdecken zu lassen.
Die Aufgabe ist nur in diesem Unterrichtskontext eine Problemlöseaufgabe. Sobald der Zusammenhang bekannt ist, stellt die Untersuchung auf Orthogonalität eine Routineaufgabe dar. Dies macht deutlich, dass die Schülerinnen und Schüler auch anhand von Standardaufgaben an die Problemlösekompetenz herangeführt werden können, z. B. bei der Einführung eines neuen Sachverhalts im Rahmen eines entdeckenden Unterrichts.
Da nicht erwartet werden kann, dass alle Schülerinnen und Schüler mit der gleichen Selbstständigkeit und Kreativität an diese Aufgabe herangehen, gibt es hierzu gestufte Lernhilfen, die z. B. in Form von QR-Codes zur Verfügung gestellt werden können. Hierbei lassen sich bereits erste Problemlösestrategien thematisieren.

Parallele und orthogonale Geraden

1. Aufgabe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Steigungen zweier paralleler Geraden?

2. Aufgabe

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Steigungen zweier orthogonaler Geraden? Falls Sie keine Idee haben, wie Sie hierzu vorgehen können, holen Sie sich nacheinander die **Hilfen 1 bis 5**. Überlegen Sie nach jeder Hilfe, ob Sie allein weiterkommen oder eine weitere Hilfe benötigen.

Hilfe 1: Klären Sie zunächst den Begriff „orthogonale Geraden“.

Hilfe 2: Zeichnen Sie ein Paar orthogonaler Geraden in ein Koordinatensystem.

Hilfe 3: Lesen Sie die beiden Steigungen ab und schauen Sie, ob Sie einen Zusammenhang erkennen. Prüfen Sie dabei, ob Sie einen Sonderfall gezeichnet haben!

Hilfe 4: Wenn Sie einen Zusammenhang erkannt haben, prüfen Sie diesen an einem oder mehreren weiteren Paaren orthogonaler Geraden.
Können Sie keinen Zusammenhang erkennen, so zeichnen Sie weitere Paare orthogonaler Geraden und lesen deren Steigungen ab. Erkennen Sie jetzt einen Zusammenhang?

Hilfe 5: Bilden Sie jeweils den Kehrwert der Steigung einer Geraden und vergleichen Sie mit der Steigung der zugehörigen orthogonalen Geraden.

Hilfen z.B. zum Aufklappen oder als Hilfekarten auf dem Pult oder als QR-Codes:

Hilfe 1 Hilfe 2 Hilfe 3

Hilfe 4 Hilfe 5

(siehe Anhang)

Aufgabe zu Vektorgeometrie (JS)

Durch Vertauschen (Permutation) der Koordinaten eines Punktes $A(x|y|z)$ entstehen neue Punkte.

a) Formulieren Sie ausgehend von $A(2|4|6)$ zwei Annahmen über die gegenseitige Lage der Punkte. Erläutern Sie und überprüfen Sie Ihre Annahmen.

b) Untersuchen Sie, ob Ihre beiden Annahmen auch für $B(2|3|8)$ gelten.

c) Untersuchen Sie, ob Ihre beiden Annahmen auch für beliebige Koordinatenwerte $C(x|y|z)$ mit $x, y, z \in \mathbb{N}$ gelten.

Aufgabe zur trigonometrischen Funktion (JS)

Diese Aufgabe zum Entdecken der Additionstheoreme mithilfe der Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen liegt in mehreren Varianten vor. Im Gegensatz zur eher kleinschrittigen Version für den VIP-Bereich mit Schwerpunkt Üben und Entdecken (vgl. 4.2.3) steht an dieser Stelle das Problemlösen im Vordergrund. Die beiden Versionen (siehe Anhang) bilden dabei unterschiedliche Anforderungsniveaus ab.

Problemlöseaufgabe zu trigonometrischen Funktionen
Schwerpunkt: Problemlösen (verschärfte Version)

1. Aufgabe

a) Erzeugen Sie mit einem DMW die Graphen der Funktionen

$g(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x)$; $h(x) = \sqrt{2} \cdot \cos(x)$; $f(x) = \sqrt{2} \cdot \sin(x) + \sqrt{2} \cdot \cos(x)$

Was fällt Ihnen auf? Beschreiben Sie Ihre Beobachtung.

b) Beschreiben Sie die Funktion f als verschobene und gestreckte Sinuskurve.

c) Dividieren Sie durch die Amplitude von f und ergänzen Sie die Gleichung

$$\square \cdot \sin(x) + \square \cdot \cos(x) = \sin(x + \square)$$

2. Aufgabe

Der in der 1. Aufgabe entstandene Zusammenhang hat offenbar die Form:

$$f(x) = a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sin(x + z)$$

Wie hängen a und b von z ab?

Erforschen Sie diese Zusammenhänge.

Formulieren Sie eine Hypothese und prüfen Sie diese an weiteren Beispielen nach.

Sie haben soeben das sogenannte **Additionstheorem für den Sinus** entdeckt:

$\sin(x + z) =$

3. Aufgabe

Bearbeiten Sie Aufgabe 1 und 2 erneut, stellen Sie die Funktion f jedoch als verschobene Kosinusfunktion dar und formulieren Sie damit das **Additionstheorem für den Kosinus**:

$\cos(x + z) =$

(siehe Anhang)

Aufgabe zu kubischen Funktionen (JS)

In dieser Aufgabe entdecken die Schülerinnen und Schüler während der Übungsphase zur Differenzialrechnung überraschende Eigenschaften von kubischen Funktionen, jeweils den Zusammenhang von Wendepunkt und von Tangenten mit den Nullstellen der Funktion. Eine besondere Herausforderung stellt das anschließende Beweisen dieser Zusammenhänge dar.

Problemlöseaufgabe zu Kubischen Funktionen

1. Aufgabe (Wendepunkt)

Wählen Sie drei unterschiedliche Zahlen zwischen -10 und 10. Diese Zahlen sind die Nullstellen einer Polynomfunktion f vom Grad 3.

a) Bestimmen Sie einen möglichen Funktionsterm.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunkts von K_f.

c) Berechnen Sie den Mittelwert der drei Nullstellen. Was fällt Ihnen auf? Tauschen Sie sich mit Ihren Mitschüler*innen aus.

d) Überprüfen Sie, ob ihre Vermutung aus c) auch dann gilt, wenn Ihre Funktion eine doppelte (oder dreifache) Nullstelle hat.

e) Versuchen Sie Ihre Vermutung allgemein zu beweisen

(siehe Anhang)

Weitere Aufgaben

Weitere Beispiele für Problemlöseaufgaben sowohl für den Unterricht als auch zur Leistungsfeststellung (mit Bewertungsraster) werden von einer Kommission erarbeitet. Die Ergebnisse werden nach Beendigung der Kommissionsarbeit in einer Handreichung auf der Seite des ZSL veröffentlicht.

3.2.2 KOPFÜBUNGEN UND REWUES

„Mit regelmäßiger Wiederholung grundlegender Wissensbausteine kann dem Vergessen entgegengewirkt werden und die Lernenden verfügen langfristig über ein solides Fundament, um auch anspruchsvolle Aufgaben erfolgreich mathematisch bearbeiten zu können.“ [Bruder, R., Modul 4: Sicherung von Basiswissen – Verständnisvolles Lernen auf unterschiedlichen Niveaus, S. 12. Unter: http://www.sinus-transfer.de/fileadmin/MaterialienBT/Bruder_Modul4_mai2006.pdf, abgerufen am 09.12.2019.]

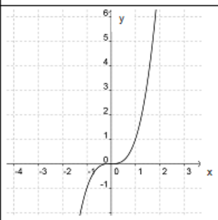
Kopfübungen

Kopfübungen bestehen aus fünf oder zehn kurzen Aufgaben, die mathematisches Grundwissen aus den in der Vergangenheit behandelten Themen erfragen und die ohne Hilfsmittel gelöst werden können (s. untere Abbildung). Nach dem Konzept der Professorin für Didaktik der Mathematik Dr. Regina Bruder bilden die Kopfübungen ein wöchentliches Ritual, das etwa fünf bis zehn Minuten der Unterrichtszeit in Anspruch nimmt. Sie haben nicht den Charakter eines Kurztests, sondern werden ausschließlich vom Lernenden korrigiert und dienen ihm zur Selbsteinschätzung mit dem Ziel, das eigenständige Aufarbeiten erkannter Defizite anzuregen.

Jahrgangsstufe Serie A: Kopfübung Nr. 1

1. Berechne: $\frac{1}{2}+\frac{5}{3}$
2. Skizziere den Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$
3. Welche Periode hat die Funktion g mit $g(x) = 3\sin(x)$?
4. Gib die Gleichung der um 4 nach unten und 3 nach rechts verschobenen Normalparabel an.
5. Gib einen Term für die folgende Zuordnung an: Kantenlänge eines Würfels → Oberfläche eines Würfels

Lösungen

1.	$\frac{3+10}{6}=\frac{13}{6}$
2.	
3.	2π
4.	$p(x) = (x-3)^2 - 4$
5.	$O(x) = 6x^2$ x: Kantenlänge O: Oberfläche

(siehe Anhang)

Die Lehrkraft legt die Aufgaben, die für mehrere Wochen denselben fünf bzw. zehn unterschiedlichen Themen entstammen, z. B. per Visualizer vor und deckt nach kurzer Bearbeitungszeit ihre vorbereiteten Lösungen auf. Die Reihenfolge der Themen ändert sich in diesem Zeitraum nicht, sodass die Schülerinnen und Schüler aus einer „Kopfübungs-Tabelle“, in welche sie ihre Ergebnisse und eventuelle Korrekturen eintragen, mögliche Stärken und Schwächen ersehen (siehe untere Abbildung). Eine Besprechung der Kopfübungen sieht das Konzept von Frau Professor Dr. Bruder nicht vor, aufkommende Fragen zu einzelnen Aufgaben sollten jedoch beantwortet werden. Damit die Lernenden in die Lage versetzt werden, die erkannten Defizite eigenständig auszuräumen, kann die Lehrkraft auf dem Tabellenblatt der Schülerinnen und Schüler auf Möglichkeiten zur Auffrischung des Grundwissens hinweisen. Möchte man sich als Lehrkraft dabei nicht auf die intrinsische Motivation der Lernenden verlassen, so können Aufgaben im Stil der Kopfübungen und aus den Themen der aktuellen Kopfübungsserie in den hilfsmittelfreien Teil jeder Klassenarbeit aufgenommen werden.

Kopfübungen der Serie A in der Jahrgangsstufe 1 Name:

Thema								Anzahl der Fehler
Rechnen mit Brüchen und Potenzen								
Schaubilder von Funktionen skizzieren (Grund-funktionen)								
Funktions-eigen-schaften nennen								
Funktions-gleichung angeben (verschieben strecken spiegeln)								
Text-aufgaben								

(siehe Anhang)

Im Anhang sind zwei Serien zu den Kopfübungen zu finden, die zu Beginn der Eingangsklasse eingesetzt werden können. Auf dem Lehrerfortbildungsserver finden Sie unter

https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/bs/6bg/6bg3/kopfuebung/

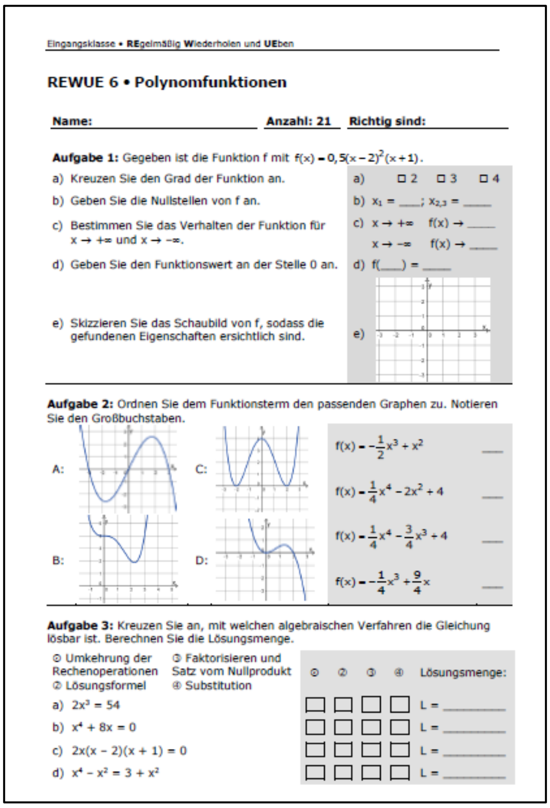
zahlreiche weitere Beispiele zu Kopfübungen für die Sekundarstufe I an Beruflichen Gymnasien der 6-jährigen Aufbauform. Besonders die dort für Klasse 10 vorgeschlagenen Kopfübungen eignen sich auch für die Eingangsklasse.

REWUEs

In Anlehnung an die WADIs (Wachhalten und Diagnostizieren) der allgemeinbildenden Gymnasien sind die REWUEs (REgelmäßig Wiederholen und UEben) für die beruflichen Gymnasien entstanden. „WADI ist eine Sammlung von thematisch geordneten Aufgabenblättern (...). Sie soll helfen, dass die Schülerinnen und Schüler ein solides Fundament an mathematischem Wissen und mathematischen Fertigkeiten erwerben, die für den kompetenzorientierten Unterricht von zentraler Bedeutung ist und ohne das eine Entwicklung von weitergehenden mathematischen Kompetenzen nicht denkbar ist.“ [vgl. https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/gym/bp2004/fb1/modul4/basis/ abgerufen am 06.01.2020]

Diese Idee wurde aufgegriffen und es entstanden 14 REWUEs zu Bildungsplaninhalten der Eingangsklasse des beruflichen Gymnasiums. Die REWUEs sind nach Behandlung eines Bildungsplanthemas als Hausaufgabe oder als Wiederholung des Stoffes zu einem späteren Zeitpunkt einsetzbar.

So können sie in Kombination mit den Kopfübungen abwechselnd vierzehntägig durchgeführt werden, um mathematisches Wissen und Fertigkeiten wachzuhalten.



Eingangsklasse • REgelmäßig Wiederholen und UEben

REWUE 6 • Polynomfunktionen

Name: ______ Anzahl: 21 Richtig sind: ______

Aufgabe 1: Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5(x-2)^2(x+1)$.

a) Kreuzen Sie den Grad der Funktion an. — a) ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

b) Geben Sie die Nullstellen von f an. — b) $x_1 =$ ___; $x_{2,3} =$ ___

c) Bestimmen Sie das Verhalten der Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$. — c) $x \to +\infty$ $f(x) \to$ ___; $x \to -\infty$ $f(x) \to$ ___

d) Geben Sie den Funktionswert an der Stelle 0 an. — d) f(___) = ___

e) Skizzieren Sie das Schaubild von f, sodass die gefundenen Eigenschaften ersichtlich sind. — e)

Aufgabe 2: Ordnen Sie dem Funktionsterm den passenden Graphen zu. Notieren Sie den Großbuchstaben.

A: C: B: D:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2$ ___

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ ___

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3 + 4$ ___

$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x$ ___

Aufgabe 3: Kreuzen Sie an, mit welchen algebraischen Verfahren die Gleichung lösbar ist. Berechnen Sie die Lösungsmenge.

① Umkehrung der Rechenoperationen ② Lösungsformel ③ Faktorisieren und Satz vom Nullprodukt ④ Substitution

	①	②	③	④	Lösungsmenge:
a) $2x^3 = 54$	☐	☐	☐	☐	L = ______
b) $x^4 + 8x = 0$	☐	☐	☐	☐	L = ______
c) $2x(x-2)(x+1) = 0$	☐	☐	☐	☐	L = ______
d) $x^4 - x^2 = 3 + x^2$	☐	☐	☐	☐	L = ______

(siehe Anhang)

Die Korrektur ist wegen der Art der Aufgabenstellungen (Richtig-Falsch-Aufgaben, Kreuzen Sie an, Ordnen Sie zu ...) schnell erledigt. Die Lehrkraft erhält sofort einen Überblick über den Kenntnisstand der Klasse zum jeweiligen Bildungsplanthema und kann bei Bedarf einzelne Fragestellungen aufgreifen und vertiefen. So bleibt trotz der Multiple-Choice-Struktur das Unterrichtsgespräch nicht an der Oberfläche.

Werden die REWUEs regelmäßig als Hausaufgabe vergeben, kann die Lehrkraft mit der Klasse vereinbaren, dass zu Beginn der nächsten Stunde zwei Schülerinnen und Schüler ihre Ergebnisse vor der Klasse kurz präsentieren und eventuelle Fragen ihrer Mitschülerinnen und -schüler beantworten. Diese Art der Hausaufgabenbesprechung rückt die Schülerinnen und Schüler in den Vordergrund, die Lehrkraft ergreift nur bei Bedarf das Wort.

Durch die Feststellung der Anzahl der richtigen Lösungen erhalten die Schülerinnen und Schüler eine Rückmeldung zu ihrem bisherigen Wissensstand zum jeweiligen Bildungsplanthema. Ohne Notendruck werden sie angehalten, individuell nachzulernen und ihre Lücken zu schließen und damit mehr Selbstverantwortung für ihr Lernen zu übernehmen.

3.3 Umsetzungsbeispiele für die Eingangsklasse

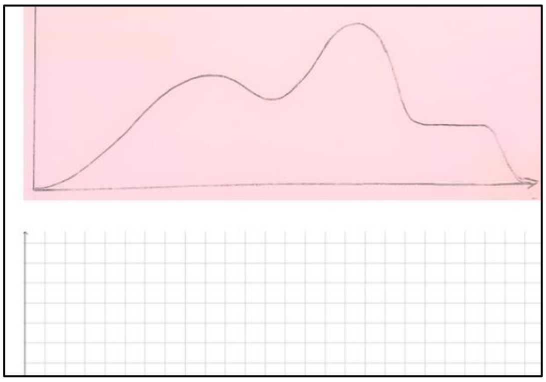
3.3.1 ÄNDERUNGSRATE UND GRAFISCHES DIFFERENZIEREN (BPE 6)

Vorbemerkungen

Der Begriff der Ableitung stellt für viele Lernende ein schwer nachvollziehbares Konzept dar, das durch verschiedene Zugänge (in der Eingangsklasse und wesentlich umfassender in Jahrgangsstufe 1) für die Schülerinnen und Schüler besser erfassbar gemacht werden soll. Deshalb, und weil so ein „Vorgeschmack“ auf die Jahrgangsstufe gegeben wird, findet sich die BPE 6 „Änderungsrate und Grafisches Differenzieren“ im Bildungsplan der Eingangsklasse.

Bei den folgenden Arbeitsblättern zeichnen die Schülerinnen und Schüler an zum Teil selbst gewählten, anschaulichen Beispielen erste Steigungsgrafen. Ein erster Arbeitsauftrag erinnert die Lernenden an die Mittelstufe, wo auch bestimmte Abläufe durch Grafen dargestellt wurden. Dabei haben sie als Grundlage einen Fantasiegrafen, bei dem Steigungen absichtlich nicht gemessen werden können. Im zweiten Teil machen die Lernenden die Erfahrung, dass auch die Änderung in diesen Abläufen durch Grafen dargestellt werden können. Sie gehen dann über zu abstrakten Funktionsgrafen, wo sie mit dem Hilfsmittel der Tangente den Ableitungsgrafen zu einer Parabel zeichnen. Auf einem schnelleren Weg kommen die Lernenden zu Skizzen von Grafen von Ableitungsfunktionen von Polynomfunktionen. Mit einem Informationsblatt zur durchschnittlichen Änderungsrate endet dann das Material zu BPE 6, das größtenteils in Gruppen- oder Partnerarbeit von den Schülerinnen und Schülern selbst erarbeitet wird.

Gruppenarbeit mit fiktiven Grafen (ca. 3 Unterrichtsstunden)

Unterrichtsverlauf	**Methodisch-didaktische Hinweise**
Einleitung Teil 1: Stellen Sie sich vor, der gezeichnete Graf stelle die **Geschwindigkeit** eines Objektes dar (Maus, Mensch, Auto, Schiff…). In Ihrem Koordinatensystem ist auf der x-Achse die Zeit, auf der y-Achse die Geschwindigkeit abgetragen.  (siehe Anhang) Schreiben Sie eine Geschichte, in der es um die Bewegung dieses Objektes geht. Beachten Sie dabei die besonderen Punkte des Grafen („Berge, Täler, Flachstellen“). Beschriften Sie das Koordinatensystem mit Einheiten passend zu Ihrer Geschichte. Legen Sie fest, wer die Geschichte vorlesen soll.	Die Klasse wird in drei Teile aufgeteilt. Jedes Drittel bearbeitet in 4er Gruppen eine der Aufgabenstellungen „Geschwindigkeit/Beschleunigung“, „Höhe über NN/Steigung oder Gefälle“, „Wasserstand/Zu- oder Abfluss“. Präsentation und Diskussion der Geschichten **Intention**: Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass derselbe Graf unterschiedliche Vorgänge in unterschiedlichen Kontexten repräsentieren kann.
Einleitung Teil 2: In dem Koordinatensystem unter dem Grafen soll nun der Graf der **Beschleunigungsfunktion** Ihres Objektes passend zur Geschwindigkeit dargestellt werden. Beachten Sie: Wo ist die Beschleunigung am größten, wo wird gar nicht beschleunigt, wo wird gebremst? Finden Sie eine Begründung für Ihren Grafen.	Im Teil 2 werden Grafen der Änderung der Geschwindigkeit usw. erstellt. Dabei entstehen oft „eckige“ Grafen oder solche „mit Zacken“. Diese halten aber den Begründungen der anderen Gruppen nicht stand. Präsentation der gefundenen Grafen mit Begründung für ihre Richtigkeit bzw. Fehler.

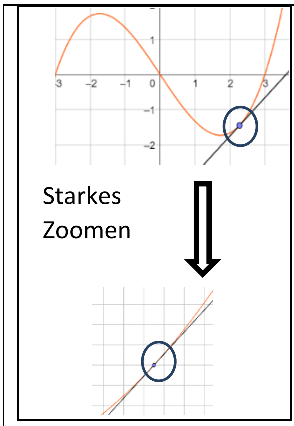
Vergleichen Sie Ihren Grafen mit denen der anderen Gruppen. Hält Ihre Begründung stand? Einigen Sie sich auf eine Version und legen Sie fest, wer sie vorstellt.	**Intention:** Die Schülerinnen und Schüler erkennen, dass fast alle Grafen sich in der Form gleichen. An den Stellen Höhen und Tiefen sowie der Flachstelle des ersten Grafen schneidet der untere die x-Achse bzw. verläuft auf ihr. Der zweite Graf repräsentiert die Änderungen im ersten!

Grafen von Ableitungsfunktionen von Parabeln zeichnen (ca. 3 Unterrichtsstunden)

Einstieg:

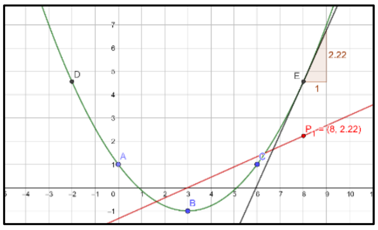
- Anknüpfung an letzte Stunde: Vorliegende Parabel als Ausschnitt unseres vorigen Grafen darstellen.
- Feststellung: Die Steigung dieser Parabel ist überall verschieden.
  Steigungen in den markierten Punkten von den Lernenden beschreiben lassen.
- Ziel: Die Steigungen sollen näherungsweise bestimmt und der Graf der Ableitungsfunktion gezeichnet werden.

Unterrichtsverlauf	**Methodisch-didaktische Hinweise**
AB: (s. Anhang) **Information:** Die Steigung eines Funktionsgrafen in einem Punkt – man nennt sie auch die **lokale Änderungsrate in diesem Punkt** – ist identisch mit der Steigung der Tangente an den Grafen in diesem Punkt. Dies wird deutlich, wenn man einen Funktionsgrafen mit Tangente stark vergrößert:	Besprechung der Information und Durchführen des Zoomens mit GeoGebra (Tablet oder Handy)

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Aufgaben:

a. Bestimmung der Steigungen der Parabel in den angegebenen Punkten und Zeichnen des Grafen der Ableitungsfunktion.



b. Zeichnen einer beliebigen, nach unten geöffneten Parabel mit dem Grafen der Ableitungsfunktion.

Vergleich mit Mitschülerinnen und Mitschülern → Bildung von Hypothesen

c. In GeoGebra (Grafikrechner) viele Parabeln und ihre Steigungsgrafen ansehen.

</td>
<td>

Einzelarbeit

Gestufte Hilfen über GeoGebra oder Hilfekarten

(s. Anhang)

Intention:

Erkenntnis: Der Graf einer Ableitungsfunktion kann nur eine Skizze sein!

1. Hypothese: Der Graf der **Ableitungsfunktion** zu einer Parabel ist eine Gerade.

2. Hypothese: Wenn Parabel nach oben geöffnet**,** dann Steigungsgerade steigend und umgekehrt.

3. Hypothese: Beim x-Wert des Scheitels der Parabel ist die Nullstelle der Steigungsgerade**.**

→ Festigung der Hypothesen

Diese Hypothesen werden im Unterrichtsgespräch gesammelt und auch schriftlich festgehalten.

</td>
</tr>
</table>

Hier bietet sich eine Übungsstunde zum grafischen Ableiten mit Steigungsdreiecken an Potenzfunktionen und Polynomfunktionen höheren Grades an. Der Grafikrechner von GeoGebra dient als Kontrollinstrument. Ein Ergebnis dieser Stunde sollen auch Hypothesen über den Zusammenhang von Ableitungsfunktionen und Polynomfunktionen höheren Grades sein.

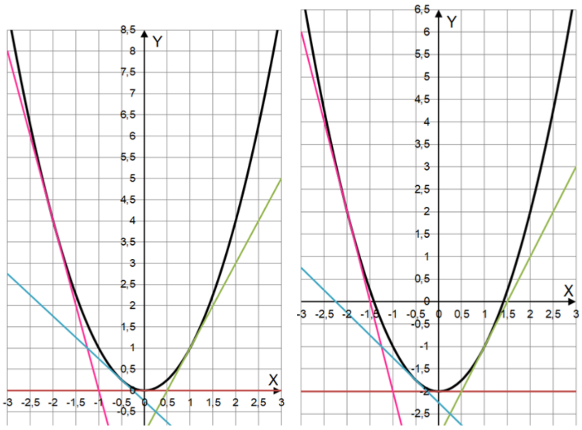
Alternative: Grafen von Ableitungsfunktionen zeichnen und Hypothesen zu Funktionstermen aufstellen (ca. 4 Unterrichtsstunden)

Einstieg:

- Anknüpfung an letzte Stunde: Vorliegenden Grafen zur Geschwindigkeit eines Objekts noch mal zeigen und auf die Steigung eingehen.
- Feststellung: Die Steigung dieses Grafen ist überall verschieden. Die Lernenden sollen Steigungen in verschiedenen Punkten beschreiben.
- Thema der Stunde: Steigung von Kurven am Beispiel von Parabeln soll bestimmt und der Graf der Ableitungsfunktion gezeichnet werden.

<table>
<tr><th>Unterrichtsverlauf</th><th>Methodisch-didaktische Hinweise</th></tr>
<tr><td>
AB1: Einstieg zu Grafen der Ableitungsfunktion von Parabeln

(s. Anhang)

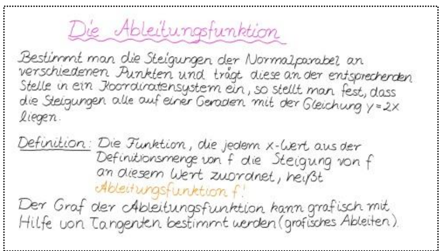


Aufgabe:

Bestimmung der Steigungen der Parabeln mit den Gleichungen $y = x^2$ und $y = x^2 - 2$ in den angegebenen Punkten und Zeichnen des Grafen der Ableitungsfunktion
</td><td>
Partnerarbeit:

Jedes Zweierteam bearbeitet die Aufgaben 1+2 und stellt Hypothesen auf.

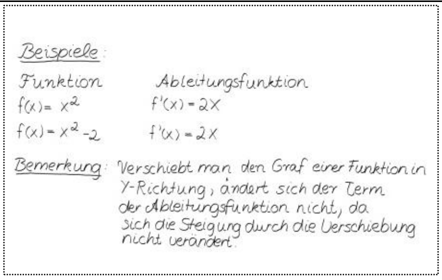
Diese werden im Unterrichtsgespräch gesammelt und schriftlich festgehalten.
</td></tr>
<tr><td>
Tafelanschrieb 1:


Die Ableitungsfunktion

Bestimmt man die Steigungen der Normalparabel an verschiedenen Punkten und trägt diese an der entsprechenden Stelle in ein Koordinatensystem ein, so stellt man fest, dass die Steigungen alle auf einer Geraden mit der Gleichung $y = 2x$ liegen.

Definition: Die Funktion, die jedem x-Wert aus der Definitionsmenge von f die Steigung von f an diesem Wert zuordnet, heißt Ableitungsfunktion f'!

Der Graf der Ableitungsfunktion kann grafisch mit Hilfe von Tangenten bestimmt werden (grafisches Ableiten).
</td><td></td></tr>
</table>

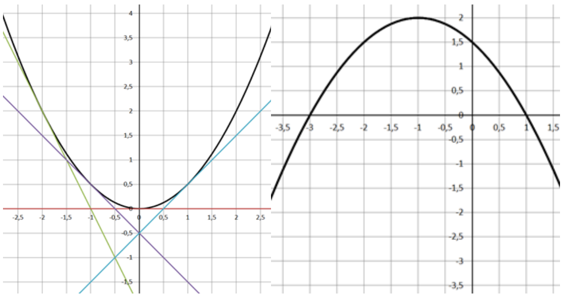
<table>
<tr>
<td>


Beispiele:

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^2 - 2$	$f'(x) = 2x$

Bemerkung: Verschiebt man den Graf einer Funktion in Y-Richtung, ändert sich der Term der Ableitungsfunktion nicht, da sich die Steigung durch die Verschiebung nicht verändert.

(s. Anhang)
</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>
AB2: Übung zum grafischen Ableiten von Parabeln

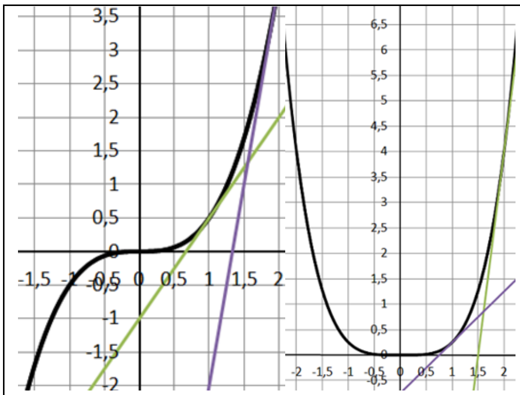


(s. Anhang)

Aufgabe:

Zeichnen des Grafen und bestimmen des Terms der zugehörigen Ableitungsfunktion von $y = 0{,}5x^2$
Skizzieren des Grafen der Ableitungsfunktion einer Parabel ohne vorgegebenen Funktionsterm
</td>
<td>
Einzelarbeit: Übung/Festigung und weitere Hypothesenbildung
</td>
</tr>
<tr>
<td>
AB3: Grafen der Ableitungsfunktionen von Potenzfunktionen
</td>
<td>
Partnerarbeit: Jedes Zweierteam bearbeitet die Aufgaben 1+2 und stellt Hypothesen auf.

Diese werden im Unterrichtsgespräch gesammelt.
</td>
</tr>
</table>



(s. Anhang)

Aufgabe:

Zeichnen des Grafen und bestimmen des Terms der zugehörigen Ableitungsfunktion von $y = 0{,}5x^3$ und $y = 0{,}25x^4$

Tafelanschrieb 2:

Hypothesen Ableitungsfunktion

Funktion	Ableitungsfunktion
$f(x) = x^2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = x^2 - 2$	$f'(x) = 2x$
$f(x) = 0{,}5x^2$	$f'(x) = 1x$
$f(x) = 0{,}5x^3$	$f'(x) = 1{,}5x^2$
$f(x) = 0{,}25x^4$	$f'(x) = 1x^3$
$f(x) = x^5$	$f'(x) = ?$
$f(x) = 2x^6$	$f'(x) = ?$

allgemeine Regel für Potenzfunktionen

① Potenzregel	② Faktorregel
$f(x) = x^n$	$f(x) = a \cdot x^n$
$f'(x) = n \cdot x^n$	$f'(x) = n \cdot a \cdot x^n$

Intention:

1. Hypothese: Der Graf der Ableitungsfunktion zu der Normalparabel ist eine Gerade mit der Gleichung $y = 2x$.

2. Hypothese: Verschiebt man die Normalparabel auf der y-Achse, so verändert sich der Graf der Ableitungsfunktion nicht.

3. Hypothese: Beim x-Wert des Scheitels der Parabel ist die Schnittstelle der Geraden mit der x-Achse.

4. Hypothese: Der Graf der Ableitungsfunktion der Parabel mit der Gleichung $y = 0{,}5x^2$ ist eine Gerade mit der Gleichung $y = 1x$.

5. Hypothese: Der Graf der Ableitungsfunktion einer Parabel 3. Ordnung mit der Gleichung $y = 0{,}5x^3$ ist eine Parabel 2. Ordnung mit der Gleichung $y = 1{,}5x^2$.

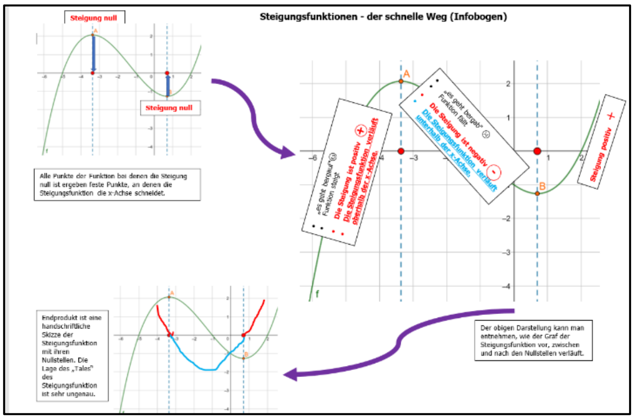
6. Hypothese: analog s. o. Die Ableitungsfunktion der Parabel 4. Ordnung $y = 0{,}25x^4$ ist eine Parabel 3. Ordnung mit der Gleichung $y = x^3$.

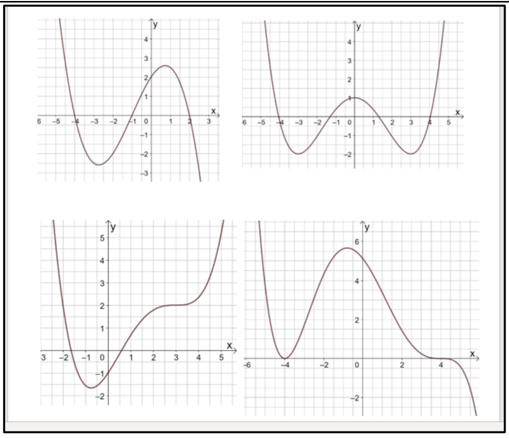
7. Hypothesen zu Ableitungsregeln für beliebige

	Potenzfunktionen
AB4: Klapptest als Übung 2) $f(x) = 3x^4 + 9$ — $f'(x) = 12x^3$ 3) $f(x) = 1{,}5x^6$ — $f'(x) = 9x^5$ 4) $f(x) = -4$ — $f'(x) = 0$ 5) $f(x) = 7x + 2$ — $f'(x) = 7$	**Einzelarbeit:** Übung/Festigung der erarbeiteten Ableitungsregeln

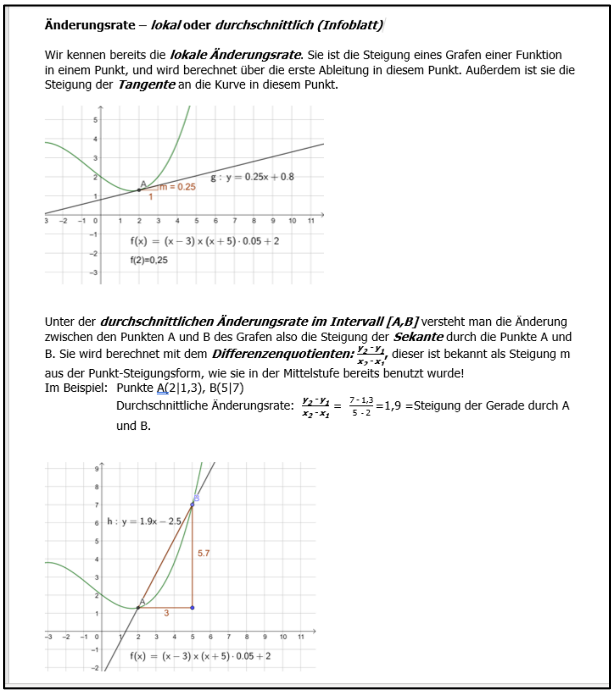
Steigungsgrafen skizzieren – Der schnelle Weg (ca. 1 Doppelstunde)

Mit einem Infobogen und dem dazugehörigen Arbeitsblatt soll eine Möglichkeit beschrieben werden, wie die Schülerinnen und Schüler schneller zu Ableitungsfunktionen kommen, allerdings zu dem Preis noch größerer Ungenauigkeit.

Unterrichtsverlauf	**Methodisch-didaktische Hinweise**
Infobogen zur Erarbeitung der grafischen Differenzierung  (s. Anhang)	Der Infobogen soll jeden Lernenden befähigen, bei einem gegebenen Grafen einer Funktion die Punkte mit Steigung null (ungefähr) sowie die Bereiche mit positiver bzw. negativer Steigung zu ermitteln. Daraus soll eine ungefähre Kurve der Ableitung generiert werden. Während der Erarbeitungsphase werden Unklarheiten durch die Lehrkraft geklärt.
Arbeitsblatt zum Grafischen Differenzieren	Mithilfe eines ersten Arbeitsblattes soll das Gelernte gefestigt werden. Außerdem werden hier noch einmal die bereits aufgestellten Hypothesen zum Zusammenhang von Funktion und ihrer Ableitung überprüft und erweitert. Die Ergebnisse werden im Plenum diskutiert. Als Transferaufgabe kann man den Schülerin-

 (s. Anhang)	nen und Schülern noch Grafen von Funktionen, die sie eventuell noch nicht kennen, wie gebrochen rationale Funktionen, e-Funktionen usw., zum grafischen Ableiten anbieten. Wenn man den Lernenden die Funktionsgleichungen bekannt gibt, können diese ihre Lösungen kontrollieren. In der GeoGebra CAS-App sehen sie auch die Gleichungen der Ableitungsfunktionen und können so Hypothesen zu den Ableitungsregeln bilden.

Die durchschnittliche Änderungsrate (ca. 1 Doppelstunde)

Unterrichtsverlauf	**Methodisch-didaktische Hinweise**
Infoblatt zur durchschnittlichen Änderungsrate  **Änderungsrate – *lokal* oder *durchschnittlich (Infoblatt)*** Wir kennen bereits die ***lokale Änderungsrate***. Sie ist die Steigung eines Grafen einer Funktion in einem Punkt, und wird berechnet über die erste Ableitung in diesem Punkt. Außerdem ist sie die Steigung der ***Tangente*** an die Kurve in diesem Punkt. Unter der ***durchschnittlichen Änderungsrate im Intervall [A,B]*** versteht man die Änderung zwischen den Punkten A und B des Grafen also die Steigung der ***Sekante*** durch die Punkte A und B. Sie wird berechnet mit dem ***Differenzenquotienten:*** $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, dieser ist bekannt als Steigung m aus der Punkt-Steigungsform, wie sie in der Mittelstufe bereits benutzt wurde! Im Beispiel: Punkte A(2|1,3), B(5|7) Durchschnittliche Änderungsrate: $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 1,3}{5 - 2}$ =1,9 =Steigung der Gerade durch A und B. (s. Anhang)	Die Einführung der durchschnittlichen Änderungsrate geschieht mit einem Infoblatt, das auch den Unterschied zur momentanen Änderungsrate darstellt. Den Schülerinnen und Schülern fällt die Berechnung der durchschnittlichen Änderungsrate in der Regel nicht schwer, da der Differenzenquotient rechnerisch der Steigung m gleich ist, die schon aus der Mittelstufe bekannt ist. Nach diesem Infoblatt können Aufgaben aus dem Schulbuch zur durchschnittlichen Änderungsrate an Funktionen oder im Sachkontext gelöst werden.

3.3.2 VEKTORGEOMETRIE (BPE 7)

Intention

Die hier vorgestellten Unterrichtsmaterialien zur Bildungsplaneinheit 7 Vektorgeometrie in der Eingangsklasse sollen dem Unterrichtenden die Möglichkeiten eröffnen, den Unterricht so zu organisieren, dass die Lernenden an eine weitestgehend eigenständige Erarbeitung von Unterrichtsinhalten herangeführt werden. Insofern konkretisiert die Konzeption der Unterrichtsmaterialien zu dieser Bildungsplaneinheit die im Vorwort des Bildungsplans geforderte Hinführung zu einer „zunehmend eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten und Problemstellungen“ mit der Zielsetzung, die Selbstwirksamkeit für die Lernenden erfahrbar zu machen.

Die vorgestellten Materialien verstehen sich als Beispiel einer Unterrichtsorganisation, die ihren Ausgangspunkt in den Grundsätzen der individuellen Förderung sieht. Die pädagogische Entscheidung, inwieweit die intendierte Eigenständigkeit für den Einzelnen sinnvoll erscheint, liegt in der Verantwortung der Lehrkraft. Zur Steuerung der Lernprozesse kann es erforderlich sein, dass instruktive Elemente oder Impulse zur affektiven Unterstützung zusätzlich eingesetzt werden. Die Beobachtungen der Lehrperson während des Unterrichts werden durch persönliche Gespräche anhand des „Besprechungsvordrucks“ validiert und münden ggfs. in einer Zielvereinbarung. Im zeitlichen Rahmen von insgesamt 15 Unterrichtsstunden ist davon auszugehen, dass ein solches Feedbackgespräch mit jedem Lernenden nur einmal durchgeführt werden kann. Die Terminierung der Einzelgespräche sollte nicht direkt zu Beginn der Einheit und auch nicht erst am Ende erfolgen, ein Richtwert für den Beginn der Feedbackgespräche ist nach sechs Unterrichtsstunden.

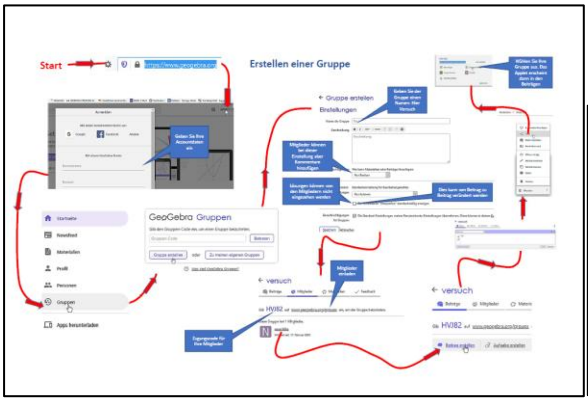
Abschließend können alle erarbeiteten Inhalte anhand des „Übersichtsblattes“ konsolidiert werden. Diese Unterrichtssequenz bildet den Übergang zu einer vertiefenden Übungsphase mit Aufgaben aus dem eingeführten Schulbuch.

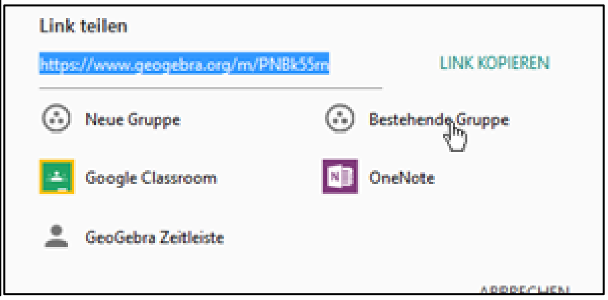
Vorbereitung

Alle Materialien werden in dem GeoGebra Buch „Henriks Vektorgeometerie“ zusammengefasst und zur Verfügung gestellt. Wenn Sie die Materialien ergänzen oder verändern möchten, müssen Sie das Lehrerbuch in Ihren Account kopieren.

https://www.geogebra.org/m/smq8j22k

Erstellen Sie in GeoGebra (https://www.geogebra.org/groups) eine Gruppe für Ihre Schülerinnen und Schüler. Alternativ können die Erarbeitungsmaterialien über die Links auf dem Protokollblatt zur Verfügung gestellt werden.





1) Laden Sie alle Arbeitsblätter DG- Vertiefung in die Gruppe. (s. Anhang)

2) Laden Sie aus dem Lehrerbuch folgende Dateien herunter:

- Arbeitsblätter *Kopiervorlage Abbildungsvorschrift*
- Protokollblatt
- Besprechungsvordruck für den Lernzirkel

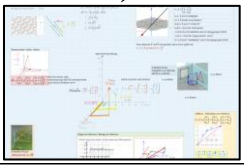
Kopieren Sie diese in der entsprechenden Anzahl (die Materialien finden Sie unter 0. Grundsätzliches und 1. Kopiervorlagen).

Vorschlag einer didaktischen Jahresplanung (Auszug)

Der folgende Auszug aus einer möglichen didaktischen Jahresplanung für die Unterrichtseinheit Vektorgeometrie in der Eingangsklasse weist 15 Unterrichtsstunden aus.

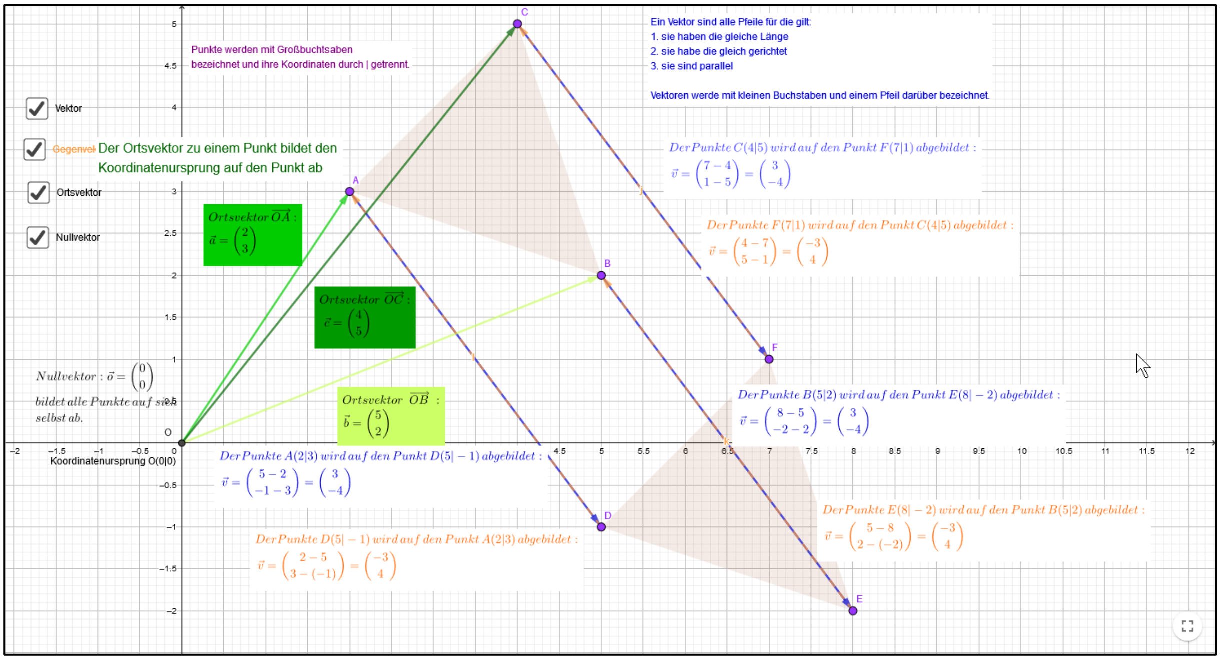
Zusätzlich stehen Stunden aus dem VIP-Bereich zur weiteren Konsolidierung der Lerninhalte zur Verfügung.

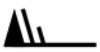
Stunden-zahl	**Themen**	**Bildungsplan-einhei-ten/Kommentare**
3	Punkte und Vektoren in der Ebene • Punkt • Vektor/Pfeilklasse • Gegenvektor • Ortsvektor • Nullvektor Organisation des Lernzirkels • Einführung des GeoGebra Buches • Verwendung des Protokollblattes • Bereitstellung von Groups • Verwendung des Besprechungsvordrucks	BPE 7.1 und 7.2 Unterrichtsgespräch Arbeitsblatt (Abbildungsvorschrift) in Partnerarbeit
9	Rechnen mit Vektoren und geometrische Bedeutung Punkte und Vektoren im Raum Untersuchung geometrischer Objekte in Ebene und Raum Senkrechte Projektion von Punkten auf Koordinatenebene Koordinatensystem, -ebenen; grafische Darstellung Skalarprodukt Winkel zwischen Vektoren Für schnelle Schülerinnen und Schüler: Forschungsauftrag zum Trapez	Eigenständiges Erarbeiten von Lerninhalten (Lernzirkel) BPE 7.1 und 7.2 BPE 7.3 Beginn der Feedback-Gespräche nach ca. drei Stunden Arbeit am Lernzirkel Hierbei ist daran gedacht vertiefende und offenere Fragestellungen bereitzustellen.
3	Konsolidierung der Inhalte	Die Inhalte und Ergebnisse des Lernzirkels

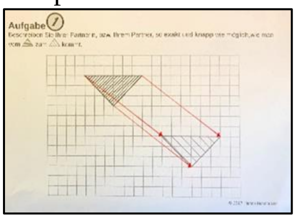
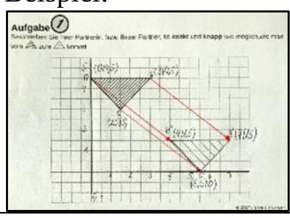
	Übungsphase	werden im Plenum am Ende der Erarbeitungsphase zusammengefasst und diskutiert. (Übersichtsblatt) 

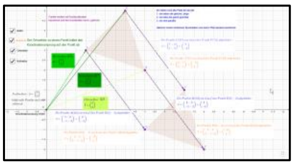
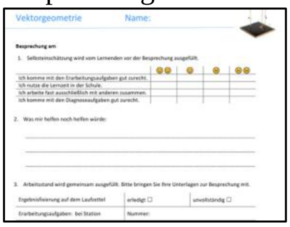
Verlaufsplan für die Einführungsphase

Exemplarisch wird im Folgenden der mögliche Einstieg in die Bildungsplaneinheit 7 skizziert. Der zeitliche Umfang beläuft sich inklusive der Einführung des Lernzirkels auf drei Stunden. Dabei wird angenommen, dass die Lernenden die Diagnoseaufgaben außerhalb der Unterrichtszeit fertigstellen. Der Tafelanschrieb wird in Form einer GeoGebra-Datei *Tafelbild* Vektoren realisiert (siehe Bild).



Phase	Methodisch-didaktische Hinweise zum Unterrichtsverlauf	Arbeitsmaterialien
Unterrichtseinstieg	**Hinführung zur zentralen Fragestellung:** Was ist ein Vektor? • Beispiel: Physik • Beispiel: Windpfeile  – Richtung	https://www.dwd.de/DWD/wetter/wv_allg/europa/film/vhs_Europa_Wind_360.mp4

	– Stärke – Parallelität (zugunsten einer höheren Übersichtlichkeit kann man in der Wettergrafik auf die Darstellung aller Windpfeile verzichten) **Intention:** Nach einer kurzen Darstellung der Bedeutung der Geometrie wird der Fokus auf die Vektorgeometrie und die weitreichenden mathematischen Beschreibungsmöglichkeiten, die sich mit diesem Gebiet eröffnen, gelenkt. Zu erwarten ist, dass einige Lernende bereits mit dem Vektorbegriff in der Physik Bekanntschaft gemacht haben. Das Beispiel aus der Meteorologie erlaubt es, die Herausarbeitung der Eigenschaften in einem für die Lernenden neuen Sachzusammenhang von Vektoren vorzuentlasten.	
Erarbeitung I (ohne Koordinatensystem)	**Ziel:** Vektor ist eine Pfeilklasse, deren Repräsentanten folgende gemeinsame Eigenschaften besitzen: • gleich gerichtet • gleich lang • parallel **Verlauf:** In Partnerarbeit werden Translationen durch Beschreibung der Bildfigur gezeichnet. Ein Koordinatensystem wurde ausgespart, um die Möglichkeit, einfach die Koordinaten der Bildpunkte anzugeben, zu umgehen. In einer fragend- entwickelnden Sequenz werden die Eigenschaften herausgearbeitet und fixiert. Das Bild Escher dient zur abschließenden Visualisierung des Begriffs: „Pfeilklasse“.	Arbeitsblätter liegen als PDF Kopiervorlagen in dem GeoGebra-Buch bereit. Beispiel:  App siehe GeoGebra-Buch Bild der Pfeilklasse: http://clipart-library.com/clipart/19-LTKr5rjyc.htm
Erarbeitung II Übergang zum Koordinatensys-	**Ziele:** Die Schülerinnen und Schüler erkunden folgende Begriffe: • Punkt • Vektor • Ortsvektor	Beispiel: 

tem	• Gegenvektor • Nullvektor **Verlauf:** Aufgrund der Doppelung der Arbeitsaufträge ist davon auszugehen, dass das Einzeichnen eines Koordinatensystems unterschiedlich realisiert wird. Die Unterschiede zwischen Punkt und Vektor lassen sich so herausarbeiten. Ebenso dienen die Arbeitsergebnisse als Ausgangspunkt, um die oben aufgeführten Grundbegriffe an der Tafel einzuführen.	
Organisation des Lernzirkels	**Einführung des Lernzirkels:** • Protokollblatt • Besprechungsvordruck • GeoGebra-Gruppe und Bereitstellen der Aufgaben DG 1.1 **Ziel:** Die Schülerinnen und Schüler übertragen die Ergebnisse aus dem 2D- Raum auf den 3-D-Raum. Die Lernenden erhalten ein erstes Feedback über die GeoGebra-Gruppe. **Weiterer Verlauf:** Die Schülerinnen und Schüler arbeiten die folgenden neun Unterrichtsstunden eigenständig mit GeoGebra. Ergänzend können zu den im Buch bereitgestellten Materialien bspw. durch Rewues oder Kahoots zur Lernstandserhebung der Gesamtgruppe eingesetzt werden.	Protokollblatt:  Besprechungsvordruck: 

3.4 Umsetzungsbeispiele für die Jahrgangsstufe

3.4.1 NORMALVERTEILUNG (ERHÖHTES NIVEAU)

Vorschlag einer Unterrichtsplanung

Im Mathematikunterricht der Jahrgangsstufe auf erhöhtem Niveau sind 45 Unterrichtsstunden für das Thema Stochastik vorgesehen. Durch eine mögliche Vertiefung beziehungsweise Individualisierung können zusätzliche Stunden aus dem Stundenpool für „Vertiefung – Individualisiertes Lernen – Projektunterricht“ (VIP) hinzukommen. Die folgende Unterrichtsplanung für die Einheit Stochastik weist sieben Unterrichtsstunden für das Thema Normalverteilung aus.

Stunden-zahl	Themen	Bildungsplan-einhei-ten/Kommentare
…		
3	Zufallsgröße (Begriff, Unterscheidung diskrete vs. stetige Zufallsgrößen), Wahrscheinlichkeitsfunktion und Erwartungswert einer diskreten Zufallsgröße	BPE 17.5 und BPE 17.9
6	Bernoulli-Ketten, Formel von Bernoulli, Berechnung von (kumulierten) Wahrscheinlichkeiten, Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion, Ermittlung unbekannter Kenngrößen	BPE 17.6 und BPE 17.7
2	Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße	BPE 17.8
3	*Stetige Zufallsgröße: vom Stabdiagramm über das Histogramm zur Dichtefunktion, stochastische Situationen mit annähernd normalverteilten Zufallsgrößen, Parameter der Dichtefunktion*	*BPE 17.9*
2	*Berechnung von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen, grafische Interpretation*	*BPE 17.9*
2	*Sigmaregeln und Prognoseintervalle für normalverteilte Zufallsgrößen*	*BPE 17.10*
2	Approximation der Binomialverteilung durch die Gauß'sche Glockenkurve und Übertragung der Sigmaregeln auf binomialverteilte Zufallsgrößen	BPE 17.8 und 17.10
…		

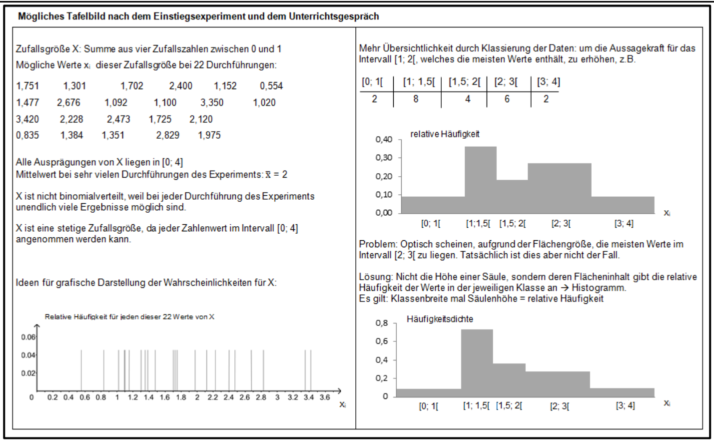
Vorbemerkungen unter Berücksichtigung digitaler Medien

Das angebotene Material sieht vor, dass die Themen Differenzial- und Integralrechnung sowie Binomialverteilung bereits unterrichtet wurden. Zudem kennen die Schülerinnen und Schüler den Begriff Zufallsgröße und können Beispiele für diskrete und stetige Zufallsgrößen angeben. Die Untersuchung einer normalverteilten Zufallsgröße und ihrer Dichtefunktion stellt eine ideale Verbindung von Stochastik und Analysis dar.

Der vorliegende Unterrichtsentwurf geht davon aus, dass die Schülerinnen und Schüler über den Taschenrechner TI-30X Plus MathPrint verfügen und zusätzlich ein digitales Mathematikwerkzeug nutzen können, mit dem sich die Dichtefunktion einer Normalverteilung auf ausgewählte Funktionseigenschaften untersuchen lässt. Steht den Schülerinnen und Schülern eine Mathematiksoftware zur Erzeugung von Zufallszahlen und zur statistischen Auswertung größerer Datenmengen zur Verfügung, so ermöglicht diese den Lernenden, bei der Erstellung und Auswertung von Histogrammen mathematische Zusammenhänge eigenständig zu entdecken.

Verlaufsplan

Unterrichtsverlauf	**Methodisch-didaktische Hinweise**
Möglicher Einstieg in das Thema Mit dem Befehl „rand" ($\boxed{2nd}$ random) erzeugt Ihr WTR zufällig eine Zahl zwischen 0 und 1. Probieren Sie`s aus! Ermitteln Sie nun die **Summe aus vier solchen Zufallszahlen** und schreiben Sie Ihr Ergebnis mit drei Nachkommastellen an die Tafel. Diskutieren Sie folgende Fragen mit Ihrem Nachbarn und notieren Sie Ihre Überlegungen knapp - **5 Min.** Angenommen, die Liste an der Tafel umfasst 10.000 derartiger Zufallszahlen. • In welchem Intervall müssten alle diese Zahlen liegen und wie wäre vermutlich der Mittelwert? • Ist die Zufallsgröße „Summe aus vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1" binomialverteilt? Begründung? • Ist diese Zufallsgröße diskret oder stetig? (s. Anhang)	Die SuS erzeugen mit ihrem WTR Werte der Zufallsgröße: „Summe von vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1" und erkennen sowohl den Unterschied zu einer binomialverteilten Zufallsgröße als auch den Unterschied zu anderen diskreten Zufallsgrößen.
Nachdem das Experiment von den Schülerinnen und Schülern durchgeführt wurde, werden die Ergebnisse in einem Stabdiagramm visualisiert. **Mögliches Tafelbild**	**Leitfrage**: Wie könnte eine (tabellarische oder grafische) Häufigkeits- bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Zufallsgröße „Summe von vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1" aussehen? **Erkenntnis 1:** Je häufiger das Experiment, desto mehr Werte von X/ mehr Stäbe.



Mögliches Tafelbild nach dem Einstiegsexperiment und dem Unterrichtsgespräch

Zufallsgröße X: Summe aus vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1
Mögliche Werte x_i dieser Zufallsgröße bei 22 Durchführungen:

1,751	1,301	1,702	2,400	1,152	0,554
1,477	2,676	1,092	1,100	3,350	1,020
3,420	2,228	2,473	1,725	2,120	
0,835	1,384	1,351	2,829	1,975	

Alle Ausprägungen von X liegen in [0; 4]
Mittelwert bei sehr vielen Durchführungen des Experiments: $\bar{x} = 2$

X ist nicht binomialverteilt, weil bei jeder Durchführung des Experiments unendlich viele Ergebnisse möglich sind.

X ist eine stetige Zufallsgröße, da jeder Zahlenwert im Intervall [0; 4] angenommen werden kann.

Ideen für grafische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für X:

Mehr Übersichtlichkeit durch Klassierung der Daten: um die Aussagekraft für das Intervall [1; 2[, welches die meisten Werte enthält, zu erhöhen, z.B.

[0; 1[	[1; 1,5[	[1,5; 2[	[2; 3[	[3; 4]
2	8	4	6	2

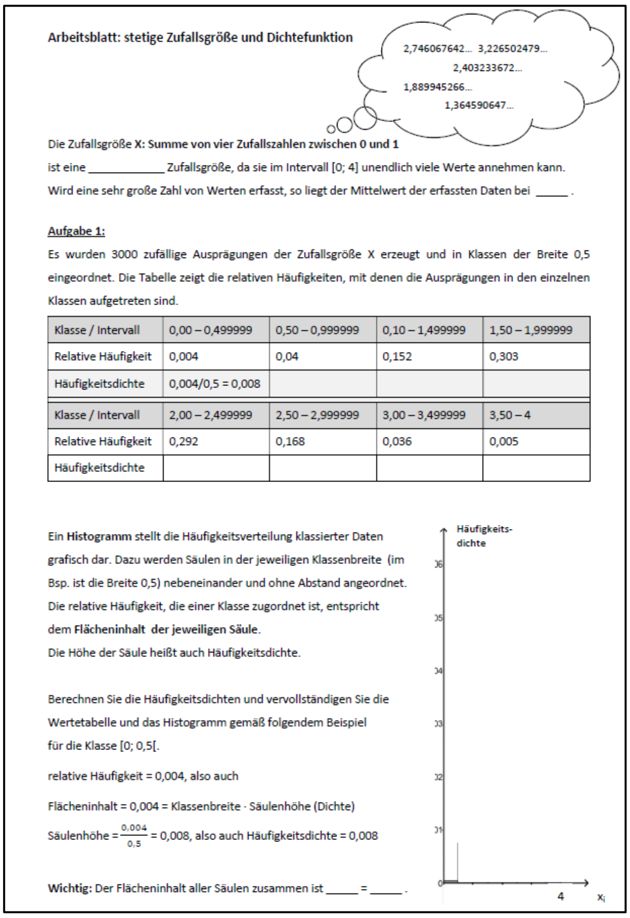
Problem: Optisch scheinen, aufgrund der Flächengröße, die meisten Werte im Intervall [2; 3[zu liegen. Tatsächlich ist dies aber nicht der Fall.

Lösung: Nicht die Höhe einer Säule, sondern deren Flächeninhalt gibt die relative Häufigkeit der Werte in der jeweiligen Klasse an → Histogramm.
Es gilt: Klassenbreite mal Säulenhöhe = relative Häufigkeit

(s. Anhang)

Ein Unterrichtsgespräch führt zur Idee, die Daten zu klassieren und mittels Histogramm darzustellen.

Zur Ergebnissicherung und zur Einführung der Dichtefunktion einer stetigen Zufallsgröße dient das zweiseitige **Arbeitsblatt „stetige Zufallsgröße und Dichtefunktion“.**



Arbeitsblatt: stetige Zufallsgröße und Dichtefunktion

Die Zufallsgröße **X: Summe von vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1**
ist eine ____________ Zufallsgröße, da sie im Intervall [0; 4] unendlich viele Werte annehmen kann.
Wird eine sehr große Zahl von Werten erfasst, so liegt der Mittelwert der erfassten Daten bei _____ .

Aufgabe 1:
Es wurden 3000 zufällige Ausprägungen der Zufallsgröße X erzeugt und in Klassen der Breite 0,5 eingeordnet. Die Tabelle zeigt die relativen Häufigkeiten, mit denen die Ausprägungen in den einzelnen Klassen aufgetreten sind.

Klasse / Intervall	0,00 – 0,499999	0,50 – 0,999999	0,10 – 1,499999	1,50 – 1,999999
Relative Häufigkeit	0,004	0,04	0,152	0,303
Häufigkeitsdichte	0,004/0,5 = 0,008			
Klasse / Intervall	**2,00 – 2,499999**	**2,50 – 2,999999**	**3,00 – 3,499999**	**3,50 – 4**
Relative Häufigkeit	0,292	0,168	0,036	0,005
Häufigkeitsdichte				

Ein **Histogramm** stellt die Häufigkeitsverteilung klassierter Daten grafisch dar. Dazu werden Säulen in der jeweiligen Klassenbreite (im Bsp. ist die Breite 0,5) nebeneinander und ohne Abstand angeordnet.
Die relative Häufigkeit, die einer Klasse zugordnet ist, entspricht dem **Flächeninhalt der jeweiligen Säule**.
Die Höhe der Säule heißt auch Häufigkeitsdichte.

Berechnen Sie die Häufigkeitsdichten und vervollständigen Sie die Wertetabelle und das Histogramm gemäß folgendem Beispiel für die Klasse [0; 0,5[.

relative Häufigkeit = 0,004, also auch

Flächeninhalt = 0,004 = Klassenbreite · Säulenhöhe (Dichte)

Säulenhöhe = $\frac{0,004}{0,5}$ = 0,008, also auch Häufigkeitsdichte = 0,008

Wichtig: Der Flächeninhalt aller Säulen zusammen ist _____ = _____ .

→ Dabei nimmt die relative Häufigkeit für jeden einzelnen Wert ab.

→ Die Stäbe stehen besonders dicht in dem Intervall, in welchem Werte häufig vorkommen.

→ Da es unendlich viele Ausprägungen der Zufallsgröße gibt, ist die Wahrscheinlichkeit für jede einzelne Ausprägung Null.

Erkenntnis 2: Um die Übersichtlichkeit der Darstellung zu verbessern, können die Daten klassiert und mittels Histogramm dargestellt werden.

→ Der Flächeninhalt jeder Säule entspricht der relativen Häufigkeit, mit welcher beobachtete Werte der Zufallsgröße in diesem Intervall liegen.

→ Die Höhe einer Säule im Histogramm zeigt die Häufigkeitsdichte an (je höher, desto dichter sind in diesem Intervall die Stäbe im Stabdiagramm).

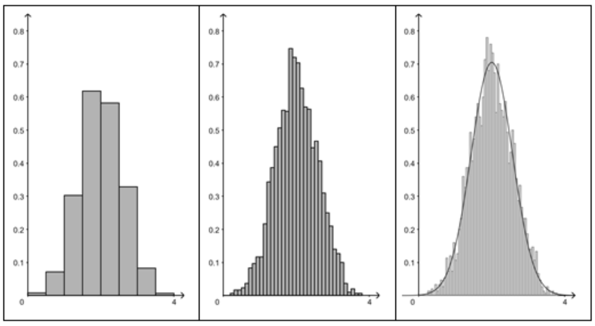
Erkenntnis 3: Bei einer stetigen Zufallsgröße lässt sich die Häufigkeitsdichte durch eine integrierbare Funktion, der Dichtefunktion, beschreiben.

→ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein beobachteter Wert der Zufallsgröße im Intervall I liegt, entspricht dem Inhalt der Fläche, die vom Graf der Dichtefunktion und der x-Achse auf I eingeschlossen wird.

<table>
<tr>
<td>

Aufgabe 2:

Die vorher erzeugten Daten wurden nun in drei Histogrammen dargestellt. Von links nach rechts verringert sich die Klassenbreite von 0,5 auf 0,1 und 0,05. Erzeugt man immer mehr Werte einer Zufallsgröße und verringert bei der Darstellung dieser Werte die Klassenbreite, dann nähert sich die Kontur des Histogramms einer glockenförmigen Kurve an. Diese Kurve ist der Graph der so genannten **Dichtefunktion f der Zufallsgröße X**.



Nehmen Sie im Histrogramm links die dritte Säulevon links in den Blick.

Diese Säule hat einen Flächeinhalt von ______ · ______ = ______. Das bedeutet: _____% der erfassten Werte ivon X liegen zwischen 1 und 1,5. Oder, wenn der Verteilung eine sehr große Zahl von Daten zugrunde liegt: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert von X zwischen 1 und 1,5 liegt, beträgt ______.

Wenden Sie sich dem Histogramm rechts zu. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird durch eine glockenförmige Kurve näherungsweise beschrieben. Betrachtet man den Flächeninhalt, den diese Glockenkurve mit der x-Achse einschließt, so ist dieser ungefähr so groß wie die Summe der Flächeninhalte aller Säulen des Histogramms, nämlich 1 = 100%. Damit hat im Grenzfall (Kontur des Histogramms = Glockenkurve) auch die Fläche unter der Glockenkurve diesen Inhalt. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Wert von X im Intervall [1; 1,5] liegt, entspricht dann dem Inhalt der Fläche, die die glockenförmige Kurve in diesem Intervall mit der x-Achse einschließt.

Markieren Sie diese Fläche und notieren Sie das zugehörige Integral: $P(1 \le X \le 1{,}5) =$ ________________________

Schreiben Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = 1{,}5)$ als Integral und geben Sie dessen Wert an. Interpretieren Sie.

$P(X = 1{,}5) =$ _____________________ = ______ d.h. ____

Eine Zufallsgröße X ist stetig, wenn eine integrierbare Funktion f existiert,
sodass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \le b$ gilt: $P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,dx$
Achtung: $P(X = k) = \int_k^k f(x)\,dx = 0$

Zusatzfrage: Was ändert sich, wenn man in der Formel „≤“ durch „<“ ersetzt?

(s. Anhang)

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>

Anhand des **Arbeitsblattes „normalverteilte Zufallsgrößen und Parameter ihrer Dichtfunktion“** entdecken die Schülerinnen und Schüler ausgehend vom Term der Dichtefunktion normalverteilter Zufallsgrößen die Bedeutung der Parameter für den Grafen der Dichtefunktion sowie die Bedeutung eines Flächenstücks zwischen diesem Grafen und der x-Achse.

</td>
<td>

Leitfrage: Wie lautet der Term der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße und durch welche Parameter wird diese Dichtefunktion charakterisiert?

Mögliche Zusatzfrage zur individuellen Förderung leistungsstarker Schülerinnen und Schüler: Durch welche Transformationen geht der Graf der Dichtefunktion f aus dem Grafen der Funktion g mit $g(x) = e^{-x^2}$ hervor? Beschreiben Sie, wie sich die Parameter μ und σ auf die Lage und die Form des Grafen von f auswirken.

</td>
</tr>
</table>

Arbeitsblatt: normalverteilte Zufallsgrößen und Parameter ihrer Dichtefunktionen

In der Natur gibt es zahlreiche stetige Größen mit einem gewissen Standardwert, von welchem die tatsächlichen Werte mehr oder weniger stark abweichen. Die Verteilung dieser Werte um den Standard lässt sich oft durch eine glockenförmige Kurve beschreiben. Man spricht dann von **normalverteilten Zufallsgrößen**, z. B.:

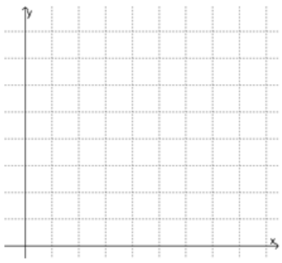
- Körpergrößen von Personen gleichen Geschlechts und Alters
- Hühnereigewichte
- Gewichte von Neugeborenen
- zufällige Abweichungen vom Nennmaß bei der Fertigung von Werkstücken
- Niederschlagsmengen an einem Ort in einem gegebenen Zeitraum
- Messwerte einer Größe bei naturwissenschaftlichen Versuchen
- usw.

Die Glockenkurve der Normalverteilung wird charakterisiert durch zwei Parameter:
den Mittelwert μ und die Standardabweichung σ.

Die Dichtefunktion f einer Normalverteilung ist gegeben durch: $f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Die Zufallsgröße **X: Summe von vier Zufallszahlen zwischen 0 und 1** ist näherungsweise normalverteilt mit dem Mittelwert $\mu = 2$ und der Standardabweichung $\sigma \approx 0{,}566$.

Untersuchen Sie die zugehörige Dichtefunktion mit einem digitalen Mathematikwerkzeug auf Maximum- und Wendestellen sowie auf ihr Globalverhalten. Skizzieren Sie den Graph in das Koordinatensystem.



Maximumstelle:

Maximum:

Wendestellen:

Globalverhalten:

Für $x \to \infty$

Für $x \to -\infty$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen diesen besonderen Stellen von f und den Parametern der Verteilung?

____

____

Welche Bedeutung hat die Gerade $x = \mu$ für den Graph von f? ____________________

Schraffieren Sie die Fläche, deren Inhalt dem $\int_1^{1,5} f(x)\,dx$ entspricht und ermitteln Sie den Wert des Integrals.

Interpretieren Sie den Wert im Sachzusammenhang. ____________________

____

Begründen Sie, inwiefern die Zufallsgröße X, die in unserem Beispiel nur Ausprägungen im Intervall [0; 4] besitzt, mit der Dichtefunktion einer Normalverteilung, die ja für $x \in \mathbb{R}$ definiert ist, modelliert werden darf.

(s. Anhang)

Die Konsolidierung erfolgt anhand von Aufgaben.

Aufgaben, z. B.

- Parameter der Dichtefunktion aus Graf, Term oder Text herauslesen
- Graf einer Dichtefunktion bei gegebenen Parametern skizzieren (Maximum mit WTR „Normalpdf" ermitteln)
- Parameter einer Dichtefunktion im Sachzusammenhang interpretieren

Die grafische und rechnerische Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen sowie deren Interpretation im Sachzusammenhang erlernen die Schülerinnen und Schüler anhand von unterschiedlichen Aufgabenstellungen.

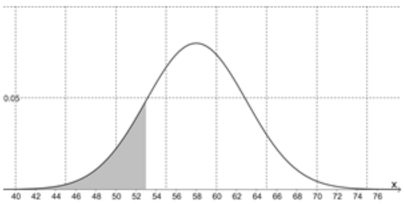
Zwei Beispielaufgaben finden Sie auf dem Arbeitsblatt „Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen".

Leitfrage: Wie können Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen grafisch und rechnerisch (insbesondere unter Nutzung des WTR) ermittelt werden?

Beispielaufgaben: Wahrscheinlichkeiten normalverteilter Zufallsgrößen

Aufgabe 1

Gegeben ist der Graph der Dichtefunktion für die normalverteilte Zufallsgröße
X: Gewicht von Hühnereiern in Gramm



a) Welche Informationen können Sie dem Schaubild entnehmen?

b) Pia behauptet: Die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Hühnerei 58 Gramm wiegt, liegt bei ca. 8%. Nehmen Sie Stellung.

c) Lesen Sie aus dem Graph die Parameter der Verteilung ab. Geben Sie das Integral an, welches dem Inhalt der grau markierten Fläche entspricht. Ermitteln Sie den Flächeninhalt mit dem WTR.
(WTR Hilfe: Nutzen Sie zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts die Verteilungsfunktion, also den Befehl „Normalcdf".)

d) Eier, die mehr als 63 Gramm wiegen, zählen zu den Gewichtsklassen L bzw. XL. Beantworten Sie ohne weitere Rechnung, wie viel Prozent der Eier in diese Kategorie fallen.

Aufgabe 2

Ein Produzent von Stuhlbeinen weiß aus Erfahrung, dass die Längen seiner maschinell hergestellten Stuhlbeine normalverteilt sind. Der Erwartungswert ist 450 mm. Er entspricht dem Sollwert für Stuhlbeinlängen.
Die Standardabweichung beträgt 1,5 mm.
Aus der Produktion wird zur Qualitätskontrolle zufällig ein Stuhlbein entnommen.

a) Geben Sie den Term der Dichtefunktion an und skizzieren Sie den zugehörigen Graph für $x \in [440; 460]$.
(WTR Hilfe: Funktionswerte der Dichtefunktion können über den Befehl „Normalpdf" ermittelt werden.)

b) Ermitteln Sie näherungsweise grafisch und anschließend mit dem WTR die Wahrscheinlichkeit $P(450 \le X \le 451)$. Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.
(WTR Hilfe: Nutzen Sie zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts die Verteilungsfunktion, also den Befehl „Normalcdf".)

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das zufällig entnommene Stuhlbein kürzer als 44,6 cm ist?

d) Alle Stuhlbeine, deren Länge mehr als 2 mm vom Sollwert 450 mm abweicht, gelten als Ausschuss. Wie viel Ausschuss wird aktuell erzeugt? Welche Abweichungen vom Sollwert muss der Produzent zulassen, wenn der Ausschuss höchstens 5% sein soll?
(WTR Hilfe: Den Wert für a, sodass $P(X < a) = 0{,}025$ ist, erhalten Sie mittels „invNormal".)

(s. Anhang)

Zur Einführung der **Sigmaregeln und Prognoseintervalle für normalverteilte Zufallsgrößen** ist eine Gruppenarbeit angedacht.

Leitfrage: Wie lässt sich ein um den Erwartungswert der Verteilung symmetrisches Intervall ermitteln, in welchem die beobachteten Werte der Zufallsgröße mit einer gegebenen Wahrscheinlichkeit liegen?

Erkenntnis 1: Bei allen normalverteilten Zufallsgrößen liegen die beobachteten Werte (sofern deren Anzahl groß genug ist) mit derselben Wahrscheinlichkeit in einer um den Erwartungswert symmetrischen Sigma-Umgebung.

Erkenntnis 2: Wenn die Parameter μ und σ einer normalverteilten Zufallsgröße bekannt sind, kann ein um den

<table>
<tr>
<td>

Gruppenarbeit: Sigmaregeln

Gruppe 1

Qualitätstests haben gezeigt, dass ein Kaffeeautomat der Marke LEO im Mittel eine Kaffeemenge von 180ml bei einer Standardabweichung von 2ml ausgibt. Die Zufallsgröße „ausgegebene Kaffeemenge" wird als normalverteilt angenommen. Berechnen Sie folgende Integrale:

$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx =$

Besprechen Sie in Ihrer Gruppe die Bedeutung Ihrer Ergebnisse.

Schon fertig? Ermitteln Sie die Zahl a, sodass $\int_{\mu-a}^{\mu+a} f(x)dx = 0{,}9$

Gruppe 2

Das Gewicht erwachsener Männer zwischen 35 und 55 Jahren ist näherungsweise normalverteilt mit einem Durchschnittsgewicht von 86 kg bei einer Standardabweichung von 12 kg. Berechnen Sie folgende Integrale:

$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx =$

Besprechen Sie in Ihrer Gruppe die Bedeutung Ihrer Ergebnisse.

Schon fertig? Ermitteln Sie die Zahl a, sodass $\int_{\mu-a}^{\mu+a} f(x)dx = 0{,}9$

Gruppe 3

Qualitätstests zeigen, dass Glühlampen der Firma LUX eine durchschnittliche Brenndauer von 2500 Stunden bei einer Standardabweichung von 230 Stunden aufweisen. Die Zufallsgröße „Brenndauer" wird als normalverteilt angenommen. Berechnen Sie folgende Integrale:

$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx =$

Besprechen Sie in Ihrer Gruppe die Bedeutung Ihrer Ergebnisse.

Schon fertig? Ermitteln Sie die Zahl a, sodass $\int_{\mu-a}^{\mu+a} f(x)dx = 0{,}9$

Gruppe 4

Das Geburtsgewicht von Neugeborenen wird als normalverteilt angenommen. Das mittlere Gewicht beträgt 3500g mit einer Standardabweichung von 400g. Berechnen Sie folgende Integrale:

$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-2\sigma}^{\mu+2\sigma} f(x)dx =$ $\int_{\mu-3\sigma}^{\mu+3\sigma} f(x)dx =$

Besprechen Sie in Ihrer Gruppe die Bedeutung Ihrer Ergebnisse.

Schon fertig? Ermitteln Sie die Zahl a, sodass $\int_{\mu-a}^{\mu+a} f(x)dx = 0{,}9$

(s. Anhang)

Auf Basis der Gruppenarbeitsergebnisse werden die gewonnenen Erkenntnisse in einem Unterrichtsgespräch gesammelt.

</td>
<td>

Erwartungswert symmetrisches Intervall ermittelt werden, in dem Werte der Zufallsgröße mit einer gegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit liegt (Prognoseintervall).

Anmerkung: WTR Befehl „invNormal" nutzen.

</td>
</tr>
</table>

3.4.2 ABBILDUNGSMATRIZEN (ERHÖHTES NIVEAU)

Didaktische Hinweise

Die vorliegende Unterrichtsplanung mit zugehörigen Arbeitsmaterialien geht davon aus, dass die BPE 20 „Beschreibung von Abbildungen durch Matrizen" im Anschluss an die Vektorgeometrie unterrichtet wird. Gemäß dieser Planung wird zunächst der allgemeine Umgang mit Matrizen unterrichtet. Eine Erarbeitung der Rechenoperationen und -gesetze bei Matrizen anhand der geometrischen Abbildungen erscheint nicht vorteilhaft, da es lediglich bei der Matrix-Multiplikation eine adäquate geometrische Entsprechung (Verkettung von Abbildungen) gibt. Andere Vorgehensweisen sind jedoch ebenfalls denkbar.

Die geometrischen Abbildungen werden grundsätzlich nur in der Zeichenebene, also dem $\mathbb{R}^2$, betrachtet, wobei im Sinne einer Vertiefung oder einer individuellen Förderung stärkerer Schülerinnen und Schüler geeignete elementare Abbildungen auch in den Anschauungsraum übertragen werden können.

Dies impliziert, dass die vorgeschaltete Matrizenrechnung sich im Wesentlichen auf 2x2-Matrizen beschränkt, wobei jedoch die Übertragbarkeit auf höhere Dimensionen stets thematisiert werden sollte. Auch besteht hier die Möglichkeit einer binnendifferenzierten Gestaltung des Unterrichts und der Lernmaterialien.

Anknüpfungspunkt der Matrizenrechnung an das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler könnte die Matrixschreibweise zur übersichtlichen Lösung von Linearen Gleichungssystemen sein. Elementare Umformungen können dabei als Addition bzw. Multiplikation von Matrizen interpretiert werden. Über die Umwandlung der Matrixschreibweise $\left(A\middle|\vec{b}\right)$ für lineare Gleichungssysteme zur Matrixgleichung $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ kann die Matrizenmultiplikation motiviert werden. Das Invertieren von Matrizen kann später im Zusammenhang mit der Umkehrung von geometrischen Abbildungen eingeführt werden.

Unterrichtsplanung

Im Folgenden wird ein möglicher Unterrichtsgang bei der Behandlung der BPE 20 „Beschreibung von Abbildungen durch Matrizen“ vorgestellt. Von diesem abweichende Vorgehensweisen sind ebenfalls möglich. Für diese BPE sind 25 Stunden ausgewiesen. Durch eine mögliche Vertiefung bzw. Individualisierung können weitere Stunden aus dem VIP Stundenpool hinzukommen.

BPE (Std.)	**Inhalt**
20.1 (6-8)	**Einführung Matrizen** (mögliche Motivation über Matrixschreibweise LGS), Vektor als Sonderfall Rechenoperationen (2x2-Matrizen, erweiterbar auf 3x3-Matrizen, Möglichkeit zur Binnendifferenzierung) • Addition (Analogie zur Vektoraddition) • Skalare Multiplikation (Analogie zu Vektoren) • Multiplikation Matrix • Vektor (LGS als Matrixgleichung), evtl. Skalarprodukt Zeilenvektor • Spaltenvektor • Matrizenmultiplikation (Verallgemeinerung von Matrix • Vektor) Integriert in Übungsphase: • Besondere Matrizen (Nullmatrix, Einheitsmatrix, Diagonalmatrix) und ihre Bedeutung bei Addition bzw. Multiplikation von links bzw. rechts • Entdecken der Rechengesetze: Assoziativ- und Distributivgesetz, Nichtgelten des Kommutativgesetzes bei Multiplikation • Inverse Matrix (evtl. im Zusammenhang mit der Umkehrabbildung)

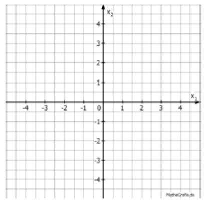
<table>
<tr>
<td>20.2
(6–8)</td>
<td>Elementare Abbildungen in der Ebene, Darstellung von affinen Abbildungen

• Abbildungsgleichungen in Koordinatenschreibweise (z. B. gemäß Gruppenarbeit)
• Abbildungsgleichungen in Matrixschreibweise: $\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$
(z. B. gemäß Arbeitsblatt)
• Zusammenhang mit den Bildpunkten von $O(0|0), E_1(1|0), E_2(0|1)$
(integriert in Übungsphase)
• Drehung um den Ursprung um einen allgemeinen Winkel α
(z. B. über die Bildpunkte von $O(0|0), E_1(1|0), E_2(0|1)$)

Abbildung von Geraden (integriert in Übungsphase, vgl. Arbeitsblatt „Affine Abbildungen, Matrixgleichung“, 3. und 4. Aufgabe)</td>
<td>Gruppenpuzzle/Gruppenarbeit Abbildungen

Gruppe A: Verschiebung, Achsenspiegelung

Information:
Bei einer geometrischen Abbildung im ebenen Koordinatensystem wird jeder Punkt $P(x_1|x_2)$ auf einen Bildpunkt $P'(x_1'|x_2')$ abgebildet. Die Abbildungsvorschrift kann häufig durch Gleichungen beschrieben werden, die angeben, wie sich die Koordinaten x_1' und x_2' des Bildpunktes P' aus den Koordinaten x_1 und x_2 des Punktes P berechnen.
Diese Gleichungen der Form $\begin{cases} x_1' = \cdots \\ x_2' = \cdots \end{cases}$ nennt man Abbildungsgleichungen.

1. Verschiebung
Jeder Punkt im ebenen Koordinatensystem soll um 3 in x_1-Richtung und um -2 in x_2-Richtung verschoben werden.
a) Zeichnen Sie drei beliebige Punkte und ihre Bildpunkte zusammen mit ihren Koordinaten in das Koordinatensystem ein.
b) Beschreiben Sie durch Gleichungen, wie sich die Bildkoordinaten x_1', x_2' berechnen:
$x_1' =$
$x_2' =$
c) Geben Sie jeweils die Bildpunkte von $O(0|0)$, $E_1(1|0)$ und $E_2(0|1)$ an.


Arbeitsblatt Abbildungen | Affine Abbildungen, Matrixdarstellung

3. Aufgabe
Gegeben sind die Punkte $A(-2|1), B(1|4)$ sowie eine Abbildung in Matrixdarstellung
$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$
a) Veranschaulichen Sie sich die Teilaufgaben b) bis d), indem Sie die darin vorkommenden Punkte und Geraden in ein Koordinatensystem einzeichnen.
b) Berechnen Sie die Koordinaten der Bildpunkte A', B'.
c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g durch A, B in Parameterform und wählen Sie einen beliebigen weiteren Punkt C auf g.
d) Berechnen Sie die Koordinaten von C' und zeigen Sie, dass C' auf der Geraden g' durch A', B' liegt.
e) Begründen Sie, dass es sinnvoll ist, die Gerade g' als die Bildgerade von g zu bezeichnen.

(s. Anhang)</td>
</tr>
<tr>
<td>20.3
(8–10)</td>
<td>Verkettung und Verallgemeinerung elementarer Abbildungen

• Verkettung von Streckung und Verschiebung (nicht kommutativ)
• Drehstreckung als Verkettung von Drehung und Streckung (Sonderfall: kommutativ)
• Spiegelung an achsenparalleler Gerade, z. B. $x_1 = c$
• Spiegelung an Ursprungsgerade,
z. B. $x_2 = \tan(\varphi) \cdot x_1$
• Drehung um ein beliebiges Drehzentrum Z
• Verkettung zweier Drehungen um $O(0|0)$; Additionstheoreme

z. B. als Gruppenarbeit gemäß Arbeitsblatt</td>
<td>Arbeitsblatt Abbildungen | Verkettung von Abbildungen

Verkettung von Abbildungen

Information:
Durch Verkettung, d.h. Hintereinanderausführung von Abbildungen lassen sich neue Abbildungen erzeugen. Dies ist vergleichbar zur Verkettung von Funktionen. Dabei wird einem Punkt P durch $\vec{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{c}$ der Punkt P‘ und diesem durch $\vec{x''} = B \cdot \vec{x'} + \vec{d}$ der Punkt P‘‘ zugeordnet, insgesamt also
$\vec{x} \longrightarrow \vec{x'} = A \cdot \vec{x} + \vec{c} \longrightarrow \vec{x''} = B \cdot \vec{x'} + \vec{d} = B \cdot (A \cdot \vec{x} + \vec{c}) + \vec{d} = (B \cdot A) \cdot \vec{x} + B \cdot \vec{c} + \vec{d}$
Es ergibt sich somit eine neue Abbildung die dem Punkt P den Bildpunkt P‘‘ zuordnet mit der Abbildungsmatrix $B \cdot A$ und dem Verschiebungsvektor $B \cdot \vec{c} + \vec{d}$:
$\vec{x''} = (B \cdot A) \cdot \vec{x} + (B \cdot \vec{c} + \vec{d})$

Arbeitsblatt Abbildungen | Verallgemeinerung von Abbildungen

Wir wollen nun ähnlich wie im Beispiel weitere Abbildungen verallgemeinern, indem wir sie auf eine elementare Abbildung zurückführen. Bestimmen Sie jeweils die Abbildungsgleichung und überprüfen Sie ihr Ergebnis mit einer Zeichnung.

2. Aufgabe
Spiegelung an einer achsenparallelen Geraden:
a) Spiegelung an $g: x_1 = 3$
b) Spiegelung an $h: x_2 = -2$

3. Aufgabe
Drehung um das Drehzentrum $Z(2|1)$ mit dem Winkel $\varphi = 60°$.

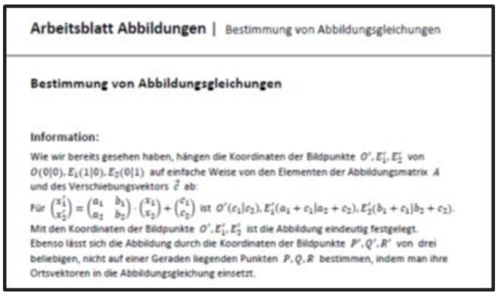
(s. Anhang)</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

Mögliche Vertiefungen (nicht im Bildungsplan)

- Umkehrabbildung (zur Motivation der inversen Matrix)
- Bestimmung allgemeiner Abbildungen aus den Bildpunkten von drei nicht-kollinearen Punkten
(z. B. gemäß Arbeitsblatt, kann auch als Wiederholung zur Lösung von 3x3-LGSen genutzt werden.)
- Fixelemente
– Fixpunkte
– Fixpunktgerade
(z. B. gemäß Arbeitsblatt)

</td>
<td>



Arbeitsblatt Abbildungen | Bestimmung von Abbildungsgleichungen

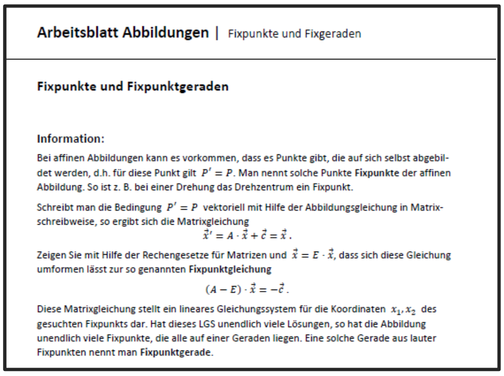
Bestimmung von Abbildungsgleichungen

Information:

Wie wir bereits gesehen haben, hängen die Koordinaten der Bildpunkte O', E_1', E_2' von $O(0|0), E_1(1|0), E_2(0|1)$ auf einfache Weise von den Elementen der Abbildungsmatrix A und des Verschiebungsvektors $\vec{c}$ ab:

Für $\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ist $O'(c_1|c_2), E_1'(a_1 + c_1|a_2 + c_2), E_2'(b_1 + c_1|b_2 + c_2)$.

Mit den Koordinaten der Bildpunkte O', E_1', E_2' ist die Abbildung eindeutig festgelegt.
Ebenso lässt sich die Abbildung durch die Koordinaten der Bildpunkte P', Q', R' von drei beliebigen, nicht auf einer Geraden liegenden Punkten P, Q, R bestimmen, indem man ihre Ortsvektoren in die Abbildungsgleichung einsetzt.



Arbeitsblatt Abbildungen | Fixpunkte und Fixgeraden

Fixpunkte und Fixpunktgeraden

Information:

Bei affinen Abbildungen kann es vorkommen, dass es Punkte gibt, die auf sich selbst abgebildet werden, d.h. für diese Punkt gilt $P' = P$. Man nennt solche Punkte **Fixpunkte** der affinen Abbildung. So ist z. B. bei einer Drehung das Drehzentrum ein Fixpunkt.

Schreibt man die Bedingung $P' = P$ vektoriell mit Hilfe der Abbildungsgleichung in Matrixschreibweise, so ergibt sich die Matrixgleichung

$$\vec{x}' = A \cdot \vec{x} + \vec{c} = \vec{x}\,.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Rechengesetze für Matrizen und $\vec{x} = E \cdot \vec{x}$, dass sich diese Gleichung umformen lässt zur so genannten **Fixpunktgleichung**

$$(A - E) \cdot \vec{x} = -\vec{c}\,.$$

Diese Matrixgleichung stellt ein lineares Gleichungssystem für die Koordinaten x_1, x_2 des gesuchten Fixpunkts dar. Hat dieses LGS unendlich viele Lösungen, so hat die Abbildung unendlich viele Fixpunkte, die alle auf einer Geraden liegen. Eine solche Gerade aus lauter Fixpunkten nennt man **Fixpunktgerade**.

(s. Anhang)

</td>
</tr>
</table>

4 Umsetzungsbeispiele für Vertiefung – individualisiertes Lernen – Projektunterricht (VIP)

4.1 Digitale Tools zur Individualisierung und Klassenführung

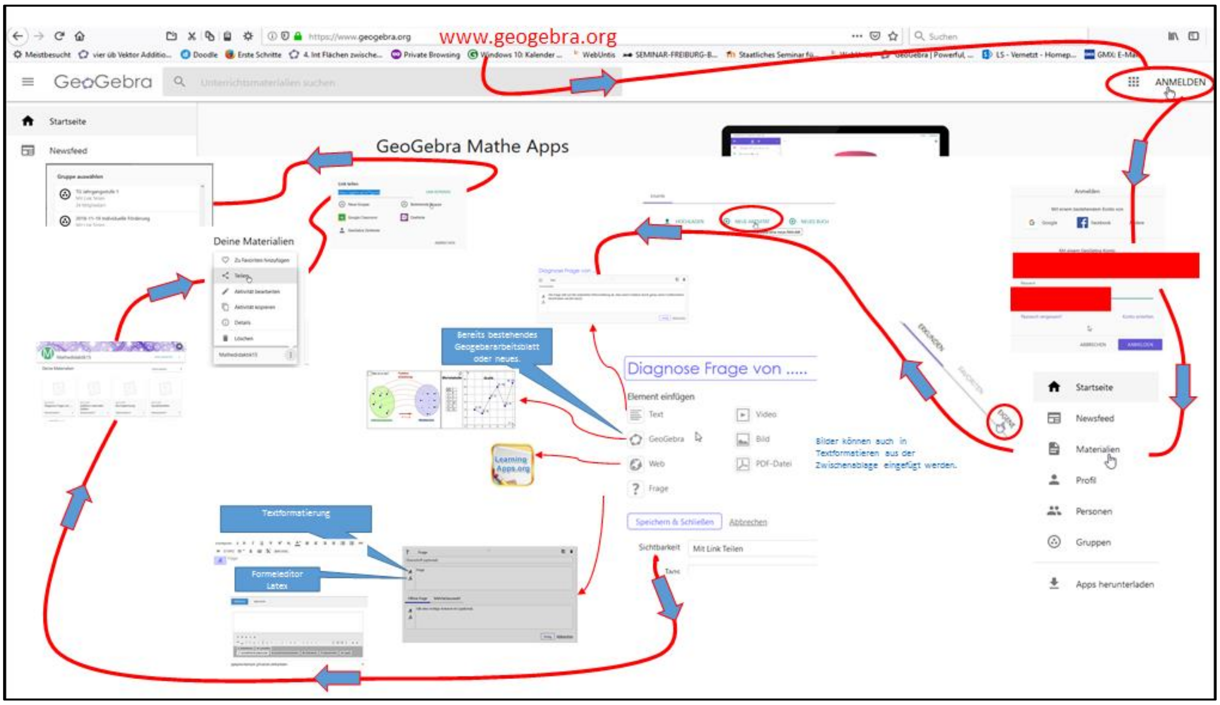
Die folgenden digitalen Tools listen drei Beispiele für den Unterrichtseinsatz mit Blick auf die Individualisierung auf. Damit konkretisieren sie aus technischer Sicht Gesichtspunkte, die im Vorwort des Bildungsplans – auf der Grundlage der Broschüre Individuelle Förderung mit digitalen Endgeräten (Ministerium für Kultus und Sport vom November 2017, s. https://www.schule-bw.de/themen-und-impulse/individuelles-lernen-und-individuelle-foerderung/berufliche-schulen/hr_digitale-endgeraete.pdf) – aufgelistet sind:

Schon seit geraumer Zeit wird versucht Moodle, als Lernplattform in den Schulen zu etablieren. Dessen vielfältige Möglichkeiten des Datenaustausches können durch die Einbindung weiterer Bestandteile ergänzt und durch den Systemadministrator für eine Lerngruppe freigegeben werden.

Microsoft OneNote kann sowohl zum Selbstmanagement der Lehrkraft als auch als Kooperationsinstrument mit Schulklassen verwendet werden. In Verbindung mit einem Stift können digitale Arbeitsblätter sogar handschriftlich bearbeitet werden.

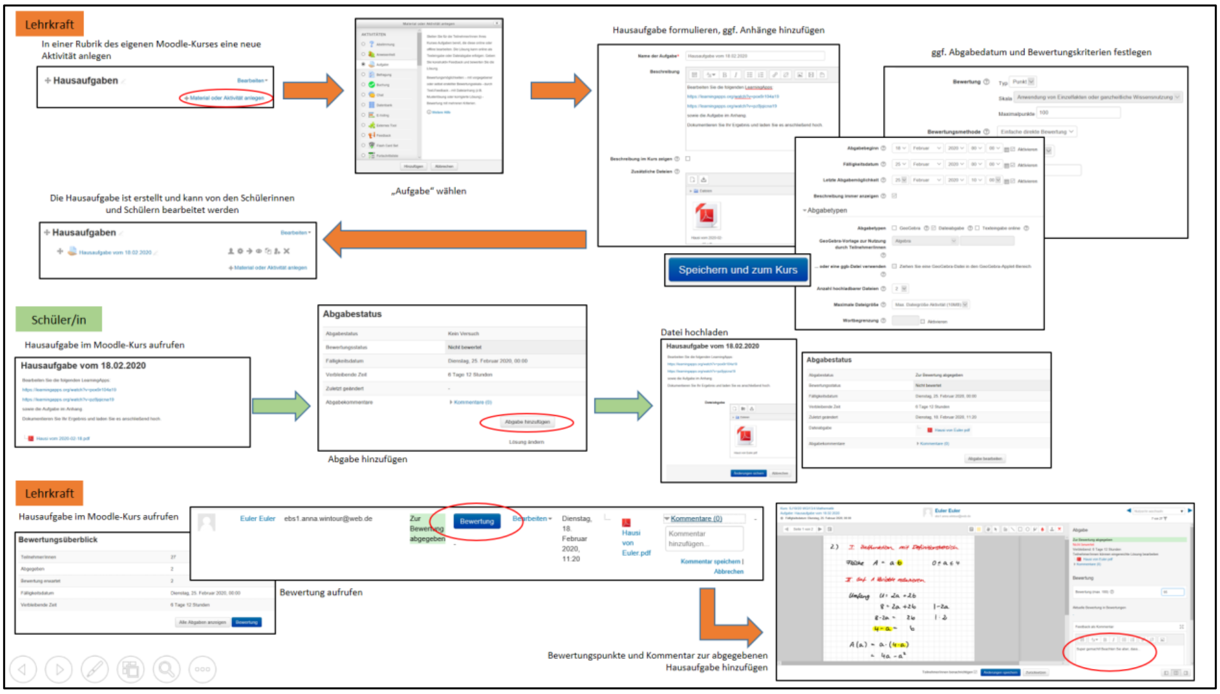
In GeoGebra Groups kann jede Lehrkraft eigenständig eine Lerngruppe einrichten und dort für diese Dateien aller Art (PDF-Dateien, Videos und unterschiedliche Aufgabenformate) zur Verfügung stellen. Auch handschriftliche Schülerergebnisse können in einen persönlichen Bereich hochgeladen und von der Lehrkraft kommentiert werden.

Anleitung GeoGebra Groups



(s. Anhang)

Anleitung Moodle



(s. Anhang)

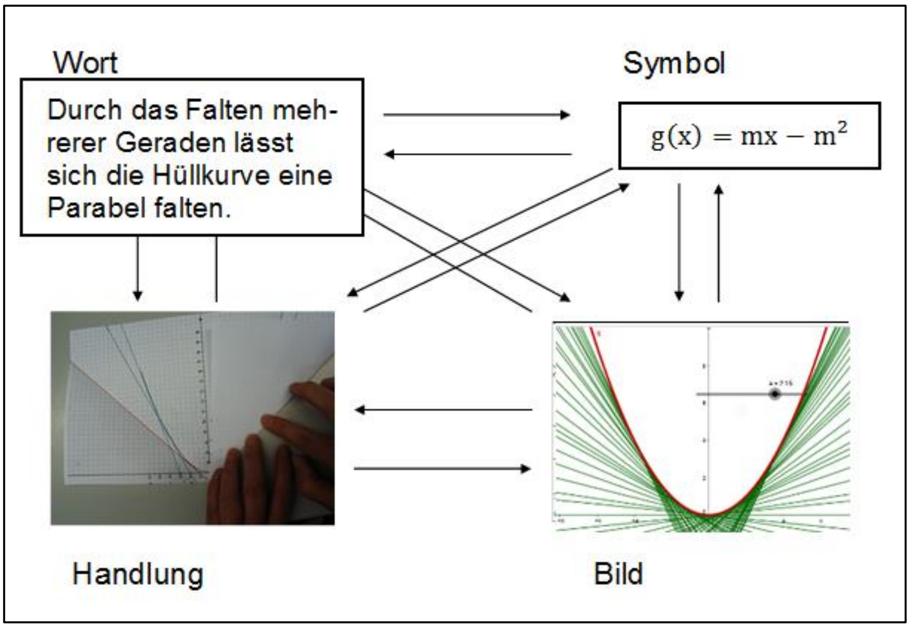
4.2 Aufgaben zur Individualisierung im Mathematikunterricht

Aus dem Vorwort des Bildungsplans wird die zentrale Bedeutung der Individualisierung für die Qualität des Mathematikunterrichts deutlich. Die folgenden Beispiele illustrieren, wie die Individualisierung auf unterschiedliche Weisen realisiert werden kann.

4.2.1 PARABEL FALTEN

Vorbemerkung

Nicht nur die unterschiedlichen schulischen Biografien und Abschlüsse unserer Schülerinnen und Schüler in den Eingangsklassen der beruflichen Gymnasien schaffen eine Inhomogenität und damit eine zusätzliche didaktische Herausforderung, sondern die unterschiedlichen affektiven und kognitiven Dispositionen sind so mannigfaltig, wie wir lernende Individuen in den Klassen haben. Für den Mathematikunterricht ergibt sich daraus die Forderung nach einem möglichst ausgewogenen Verhältnis der dargestellten Repräsentationsformen (siehe Abbildung).



Gibt man sequenziell das Unterrichtsgespräch zugunsten schriftlich formulierter Arbeitsaufträge auf, eröffnen sich während des Unterrichts Möglichkeiten der Interaktion mit einzelnen Schülerinnen und Schülern. Der Nutzen für die Schülerinnen und Schüler liegt auf der Hand: Neben dem Gefühl individuell wahrgenommen zu werden, kann ihr Lernprozess effektiv unterstützt werden. Der Nutzen für den Unterrichtenden findet sich aus pädagogischer Sicht in dem persönlicheren Beziehungsaufbau, was Unterrichtsstörungen vorbeugen kann. Ferner erlaubt der Dialog frühzeitig auf Verständnisschwierigkeiten einzugehen, einzelne Aspekte zu wiederholen und zu vertiefen, kurz: schneller regulierend auf den Lernprozess Einfluss zu nehmen.

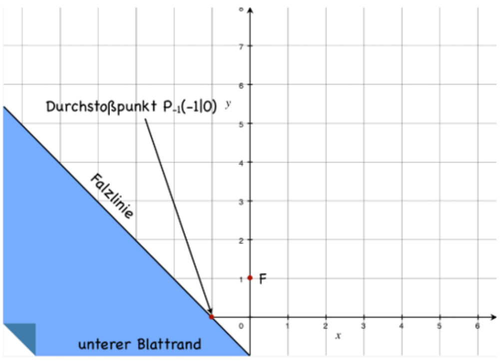
In folgendem Unterrichtsbeispiel, welches auf eine Doppelstunde ausgelegt ist, wurden die einzelnen Impulse in drei Phasen geteilt und sollten sukzessive an die Lernenden ausgegeben werden.

Phase 1

Ziel: „Falten von Geraden“ nach einem vorgegebenen Schema

Phase 1

- Legen Sie ein kariertes Blatt Papier quer vor sich und schneiden Sie gegebenenfalls den unteren Rand so ab, dass die Karos vollständig sind.
- Zeichnen Sie parallel, 1 cm vom unteren Rand entfernt, die x-Achse ein und durch die Mitte des Blattes die y-Achse. Beschriften Sie die Achsen. 1 LE entspricht 1 cm.
- Zeichnen Sie den Punkt **F** $(0|1)$ ein.
- Durchstoßen Sie mit einem spitzen Bleistift die Punkte **P$_1$** $(-3|0)$, **P$_2$** $(-2|0)$; **P$_3$** $(-1|0)$; **P$_4$** $(1|0)$, **P$_5$** $(2|0)$; **P$_6$** $(3|0)$
- Falten Sie das Blatt so, dass der untere Blattrand durch den Punkt **F** verläuft und jeweils ein Durchstoßpunkt genau in dem Falz liegt.
- Ziehen Sie die gewonnene Faltlinie mit einem bunten Stift nach. Verwenden Sie für die einzelnen Geraden unterschiedliche Farben.
- Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und überlegen Sie, wie das Bild aussehen würde, wenn mehr solcher Geraden eingezeichnet würden. Notieren Sie Ihre Vermutung:



(s. Anhang)

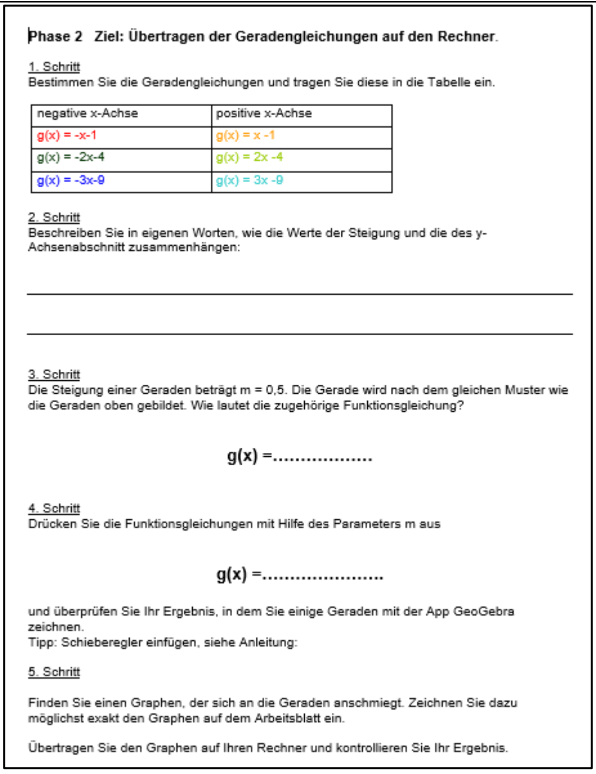
Die Zielformulierung ist an dieser Stelle bewusst kryptisch gehalten, um das angestrebte überraschende Ergebnis nicht vorwegzunehmen.

Um den ersten Zugang möglichst einfach zu halten, wurden die verbalen Arbeitsanweisungen durch Bilder ergänzt.

Das selbstständige Erzeugen der Hüllkurve mittels Falttechnik dürfte für viele Lernende überraschend sein. Dadurch wird eine subjektive Verankerung des Lerngegenstandes vorbereitet, der durch das schriftliche Formulieren einer Hypothese verstärkt wird.

Phase 2

Ziel: Übertragen der Geradengleichungen auf den Rechner zur Überprüfung der Hypothese
Der Lernende erkennt, dass die Geraden eine Parabel einschließen, und ermittelt die zugehörige Funktionsgleichung.

<table>
<tr>
<td>


Phase 2 Ziel: Übertragen der Geradengleichungen auf den Rechner.

1. Schritt
Bestimmen Sie die Geradengleichungen und tragen Sie diese in die Tabelle ein.

<table>
<tr><td>negative x-Achse</td><td>positive x-Achse</td></tr>
<tr><td>g(x) = -x-1</td><td>g(x) = x -1</td></tr>
<tr><td>g(x) = -2x-4</td><td>g(x) = 2x -4</td></tr>
<tr><td>g(x) = -3x-9</td><td>g(x) = 3x -9</td></tr>
</table>

2. Schritt
Beschreiben Sie in eigenen Worten, wie die Werte der Steigung und die des y-Achsenabschnitt zusammenhängen:

3. Schritt
Die Steigung einer Geraden beträgt m = 0,5. Die Gerade wird nach dem gleichen Muster wie die Geraden oben gebildet. Wie lautet die zugehörige Funktionsgleichung?

g(x) =.................

4. Schritt
Drücken Sie die Funktionsgleichungen mit Hilfe des Parameters m aus

g(x) =.....................

und überprüfen Sie Ihr Ergebnis, in dem Sie einige Geraden mit der App GeoGebra zeichnen.
Tipp: Schieberegler einfügen, siehe Anleitung:

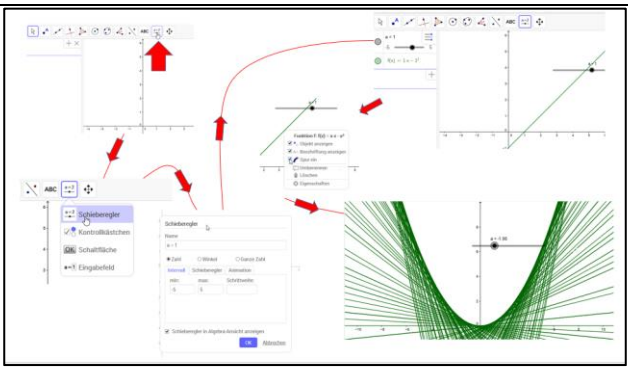
5. Schritt

Finden Sie einen Graphen, der sich an die Geraden anschmiegt. Zeichnen Sie dazu möglichst exakt den Graphen auf dem Arbeitsblatt ein.

Übertragen Sie den Graphen auf Ihren Rechner und kontrollieren Sie Ihr Ergebnis.

(s. Anhang)
</td>
<td>
Bereits aus der Mittelstufe bekannte Inhalte werden implizit wiederholt. Dadurch wird neben einer Auffrischung der Kenntnisse das Bewusstsein gestärkt, etwas zu können. D. h. bereits erworbene Kompetenzen erfahren eine Bestätigung, aus deren Folge sich ein höheres Maß an Sicherheit beim Lernenden einstellen kann.

Mittels Beschreibung in eigenen Worten soll vor der Formalisierung eine höhere subjektive Beteiligung herbeigeführt werden.

Ferner erlaubt dieser Zwischenschritt eine Differenzierung. Denn einzelne Schülerinnen und Schüler werden sehr wohl das Muster beschreiben können, aber noch nicht durch einen neuen Parameter symbolisch auszudrücken wissen.
</td>
</tr>
<tr>
<td>


(s. Anhang)
</td>
<td>
Rechnerkompetenzen können z. B. durch ein Informationsblatt eingeführt werden. Der Einsatz von GeoGebra erlaubt, dass der Lernende seine Ergebnisse selbstständig überprüfen kann. In dieser Weise eingesetzt verschafft der Rechner Freiräume für den Unterrichtenden.
</td>
</tr>
</table>

Die meisten Schülerinnen und Schüler der Klasse werden in der Unterrichtsstunde nur die Phase 2 abschließen. Die Phase 3 wird von weniger als einem Drittel der Schülerinnen und Schüler erreicht und erfolgreich gelöst und bietet die Chance auf Differenzierung an.

Phase 3

<table>
<tr><td colspan="2">Ziel: Die Definition der Parabel über Leitgerade und Brennpunkt verstehen.</td></tr>
<tr><td>
Phase 3 Ziel: Die Definition der Parabel über Leitgerade und Brennpunkt verstehen.

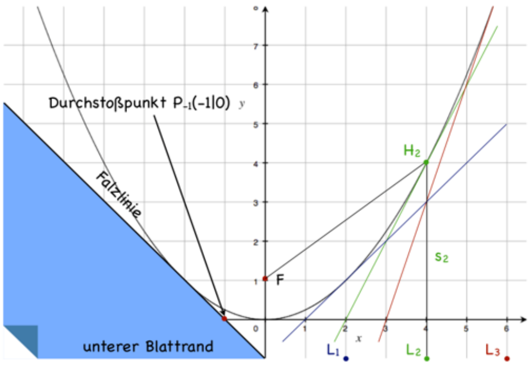
<u>Schritt 1</u>

I. Falten Sie die einzelnen Geraden nochmals entlang der Falzlinie. Der Blattrand verläuft wieder durch den Punkt F.

II. Markieren Sie jetzt den Punkt auf dem unteren Blattrand, der durch den Punkt F verläuft (siehe Abbildung). Fahren Sie so für jede Gerade fort.

III. Benennen Sie die Punkte mit L_1; L_2, L_3, usw.

IV. Die Senkrechten s auf die x-Achse durch die Punkte L_1; L_2... schneiden die Parabel in H_1; H_2 ...usw.



<u>Schritt 2</u>
Zeigen Sie, dass für alle Strecken $\overline{L_iH_i}$ und $\overline{H_iF}$ gilt: $|\overline{L_iH_i}| = |\overline{H_iF}|$

<u>Schritt 3</u>
Holen Sie den Informationstext „Definition der Parabel“ vom Pult und übertragen Sie die Begriffe Brennpunkt und Leitgerade auf Ihre Ergebnisse. Begründen Sie, weshalb man durch obige Faltanweisung eine Parabel erhält.
✂...
Informationstext: Definition einer Parabel
Eine Parabel ist die Menge aller Punkte x, deren Abstände zu einem festen Punkt F (Brennpunkt) und zu einer Geraden L (Leitgerade) gleich sind.

(s. Anhang)
</td><td>
Die formalere Aufgabenstellung bildet eine erste Hürde, eine zweite wird durch die Offenheit erreicht. Der Lernende muss nun eigenständig geeignete mathematische Werkzeuge wie den Satz des Pythagoras auf das Problem anwenden und das Vorgehen eigenständig strukturieren.

Die Information „H_i liegt auf der Parabel“ muss an dieser Stelle mit Kenntnissen des Funktionsbegriffs interpretiert werden, damit Punkt H in der Form $\left(x\middle|\frac{1}{4}x^2\right)$ ausgedrückt werden kann.

Mit den algebraischen Umformungen werden Mittelstufenkenntnisse implizit wiederholt.

Für die Lernenden der Eingangsklasse bedeutet dieser Argumentationsgang eine Herausforderung.

Der Transfer mündet in der Fragestellung, warum durch das Falten die gleichen Abstände erzeugt wurden.
</td></tr>
</table>

Abschließend sollten die Ergebnisse im Plenum vorgestellt und diskutiert werden, eine kurze Darstellung von Anwendungen beispielsweise anhand des Parabolspiegels unterstreicht den Bildungsgehalt des Lerngegenstandes und schließt die Unterrichtssequenz ab.

4.2.2 ÜBUNGEN ZUR SCHNITTPUNKTBERECHNUNG

Didaktische Hinweise

Die hier vorgestellte Unterrichtssequenz stellt exemplarisch die Möglichkeit vor, Elemente des impliziten und des produktiven Übens mit Elementen des Problemlösens zu kombinieren. So werden Inhalte der Sekundarstufe I, wie das Zeichnen von Parabeln und die Berechnung von Schnittpunkten, genutzt, um eine aufgeworfene mathematische Frage zu beantworten. Das Formulieren einer Hypothese und deren Bestätigung erfolgt zwar noch in relativ enger Führung und sind von daher nur als ein erster

Schritt hin zu einer eigenständigen Bearbeitung von mathematischen Problemen zu verstehen. Damit versteht sich dieses Beispiel als ein erster Beitrag, um den im Vorwort des Bildungsplans formulierten Auftrag nach „einer zunehmend eigenständigen Auseinandersetzung mit mathematischen Inhalten und Problemstellungen“ der Lernenden auf den Weg zu bringen (umzusetzen).

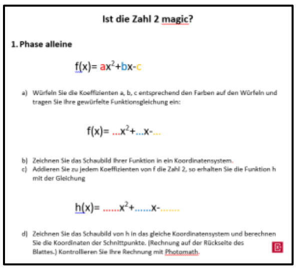
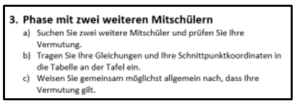
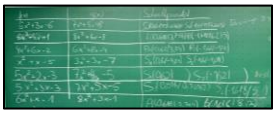
Eine fortwährende Beobachtung des Lernprozesses durch die Lehrkraft ist für eine gezielte und unterstützende Steuerung der Lernprozesse unabdingbar. Schwierigkeiten mit dem Zeichnen von Schaubildern oder dem Lösen von quadratischen Gleichungen sind ebenso zu erwarten, wie bzw. Schwierigkeiten, die durch Abweichungen aufgrund von Rundungsfehlern entstehen. Um diesen Schwierigkeiten begegnen zu können, eröffnet sich für die Lehrkraft die Möglichkeit, während der einzelnen Arbeitsphasen gezielt zusätzliche individualisierte Steuerungsimpulse zu setzen. Der Einsatz der Applikation Photomath (oder z. B. Microsoft Math Solver) erhöht die Wahrscheinlichkeit, dass die Lernenden ihre Ergebnisse selbstständig überprüfen und ohne Hilfestellung durch die Lehrkraft korrigieren.

Die Verwendung von Parametern beim allgemeinen Nachweis der Unabhängigkeit der Schnittpunktkoordinaten von den gewürfelten Koeffizienten markiert den Übergang in die Sekundarstufe II. In diesem Beispiel ergibt sich die Einführung einer zusätzlichen Variablen organisch aus der Fragestellung, sodass diese Unterrichtssequenz neben der methodischen Hinführung auch als ein Beispiel zur Erweiterung des Variablenbegriffs verstanden werden kann.

Hinweise Photomath:

- Ist sowohl im App-Store, wie bei Google Play verfügbar.
- Installation auf den Handys oder Tablets sollte vor der Stunde erfolgen.
- Gleichungen werden abgescannt und gelöst.
- Lösungsschritte können angezeigt werden.

Phase	**Methodisch-didaktische Hinweise zum Unterrichtsverlauf**	**Arbeitsmaterialien/Hinweise/Bemerkungen**
Unterrichtseinstieg	Die zentrale Forschungsfrage wird formuliert und damit wird die inhaltliche Zielsetzung bekannt gegeben. Damit zu einem späteren Zeitpunkt ein Überraschungseffekt für die Lernenden möglich ist, wird zu diesem Zeitpunkt nicht weiter auf die Frage eingegangen. Anhand des folgenden Arbeitsblattes werden die einzelnen Phasen vorgestellt. (Methodische Strukturierung der Stunde)	**Formulierung der These:** Die Zahl 2 habe eine besondere Eigenschaft: Ist 2 magic?
Erarbei-	Die zufällig generierten Funktionsgleichungen erhöhen die	**Material:**

tung I Think	Wahrscheinlichkeit, dass die Lernenden von den Ergebnissen überrascht sind. Zudem werden so viele unterschiedliche Beispiele erzeugt, die den Ausgangspunkt für die Frage, nach der Allgemeingültigkeit der Aussage bilden. **Intention:** • Aufgabe 1b) Üben der elementaren Fertigkeit „Parabeln zeichnen“ im Kontext der Forschungsfrage. • Aufgabe 1d) Üben der elementaren Fertigkeit „Parabeln zeichnen“ und „Schnittpunkte von Parabeln berechnen“ berechnen (Lösen von quadratischen Gleichungen im Kontext der Forschungsfrage). • Eigenständige Kontrolle bzw. Verifizierung des Ergebnisses mittels Photomath, mit dem Ziel, Rechenfehler zu erkennen und zu eliminieren. Darüber hinaus dient die Kommentierung der einzelnen Umformungsschritte als Beispiel für die Dokumentation (Musterlösung).	Für jeden Schüler werden drei verschiedenfarbige Würfel, entsprechend den Farben der Koeffizienten benötigt. Arbeitsblatt Teil 1  **Ist die Zahl 2 magic?** **1. Phase alleine** f(x)= ax²+bx-c a) Würfeln Sie die Koeffizienten a, b, c entsprechend den Farben auf den Würfeln und tragen Sie Ihre gewürfelte Funktionsgleichung ein: f(x)= ...x²+...x-... b) Zeichnen Sie das Schaubild Ihrer Funktion in ein Koordinatensystem. c) Addieren Sie zu jedem Koeffizienten von f die Zahl 2, so erhalten Sie die Funktion h mit der Gleichung h(x)= ......x²+......x-...... d) Zeichnen Sie das Schaubild von h in das gleiche Koordinatensystem und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte. (Rechnung auf der Rückseite des Blattes.) Kontrollieren Sie Ihre Rechnung mit Photomath. (s. Anhang)
Erarbeitung II Pair	In Kooperation mit einer Mitschülerin, einem Mitschüler werden die Rechnung und die Ergebnisse verglichen. Die Übereinstimmung der Schnittpunktkoordinaten ist durch die zufällig erzeugten Funktionsgleichungen auf den ersten Blick durchaus überraschend. Die Verbalisierung dieser Beobachtung in Form einer These bildet den Übergang zur dritten Phase.	Arbeitsblatt Teil 2:  **2. Phase mit dem Nachbarn** Vergleichen Sie die Schnittpunktkoordinaten mit denen Ihres Nachbarn und formulieren Sie gemeinsam eine Vermutung.
Erarbeitung III Share	Die formulierte Hypothese aus Phase II wird durch zwei weitere Beispiele untermauert und die Frage nach der Allgemeingültigkeit stellt sich unvermeidlich. Der Nachweis erfordert die Verwendung eines Parameters. Es ist nicht zu erwarten, dass die überwiegende Anzahl der Lernenden in der Eingangsklasse dieses Konzept schon eigenständig anwenden kann. Potenziell dient dieser Arbeitsauftrag zur zeitlichen und inhaltlichen Differenzierung und leitet zur abschließenden Unterrichtsphase über.	Arbeitsblatt Teil 3  **3. Phase mit zwei weiteren Mitschülern** a) Suchen Sie zwei weitere Mitschüler und prüfen Sie Ihre Vermutung. b) Tragen Sie Ihre Gleichungen und Ihre Schnittpunktkoordinaten in die Tabelle an der Tafel ein. c) Weisen Sie gemeinsam möglichst allgemein nach, dass Ihre Vermutung gilt.
Konsolidierung	Im Klassenverband berichten die Lernenden über ihr Vorgehen und ihre Erkenntnisse. Alle Ergebnisse werden an der Tafel gesammelt. Es findet eine Problematisierung von gerundeten Lösungen statt. Die Frage nach der Allgemeingültigkeit wird mit Blick auf die Verwendung eines Parameters erneut gestellt und mithilfe	Möglicher Tafelanschrieb 

	der nebenstehenden Gleichung beantwortet. Die Frage, ob die Zahl 2 eine Ausnahme bildet – und damit „magic“ ist –, oder aber ob jede andere Zahl zum gleichen Effekt führt, kann nun anhand der Gleichung diskutiert und beantwortet werden.	Nachweis der Unabhängigkeit der Schnittpunktkoordinaten von der Ausgangsfunktion $ax^2 + bx - c = (a+2)x^2 + (b+2)x - (c+2)$ $x^2 + x - 1 = 0$

4.2.3 AUFGABE ZU TRIGONOMETRISCHEN FUNKTIONEN (ADDITIONSTHEOREME)

Diese Aufgabe zum Entdecken der Additionstheoreme mithilfe der Eigenschaften von trigonometrischen Funktionen liegt in mehreren Varianten vor. Im Gegensatz zu den eher problemlöseorientierten Versionen (vgl. 3.2.1) entdecken die SuS bei dieser Aufgabe (siehe Anhang) in einer Form des konstruktiven Übens einen neuen Sachverhalt, die sogenannten Additionstheoreme für Sinus und Kosinus. Diese sind zwar nicht im Bildungsplan enthalten, geben dem Umgang mit trigonometrischen Funktionen jedoch einen über das reine Üben hinausgehenden Sinn.

5 Linksammlung

Weitere Materialien findet man unter:

Cosh (cooperation Schule:Hochschule) und Mindestanforderungskatalog
https://cosh-mathe.de/materialien

WADI (Wachhalten und Diagnostizieren)
https://lehrerfortbildung-bw.de/u_matnatech/mathematik/gym/bp2004/fb1/modul4/basis/

Übergänge gestalten
https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/berufliche-schularten/if

Mathebrücke (wird aktuell überarbeitet)
www.mathebrücke.de

Pool-Aufgaben des IQB (Institut zur Qualität im Bildungswesen)
https://www.iqb.hu-berlin.de/abitur/sammlung/mathematik