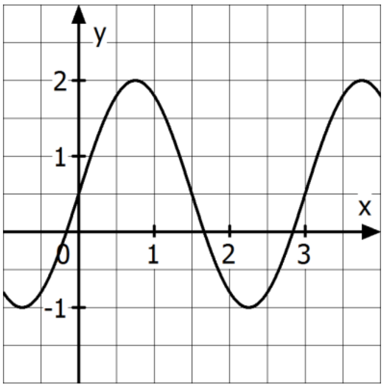
		Punkte
1	Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = a \cdot sin(b \cdot x) + c$. Bestimmen Sie aus der Abbildung die Werte für a, b und c.	3



2 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -x^3 + x$; $x \in \mathbb{R}$.
Die Normale von K im Wendepunkt schließt mit K zwei Teilflächen ein.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt einer dieser beiden Teilflächen. 6

3 Eine Funktion f hat folgende Eigenschaften:

(1) $f(3) = 1$
(2) $f'(0) = 0$
(3) $f'(x) < 0$ für $0 < x < 3$
(4) $f''(x) > 0$ für $x > 3$

Welche Eigenschaften des Schaubilds von f entsprechen den Eigenschaften (1) bis (4)?

Skizzieren Sie ein mögliches Schaubild von f. 7

4 Auf dem Schaubild K der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 2t \cdot x^2$ mit $x \in \mathbb{R}$ liegt der Punkt P(2|4).

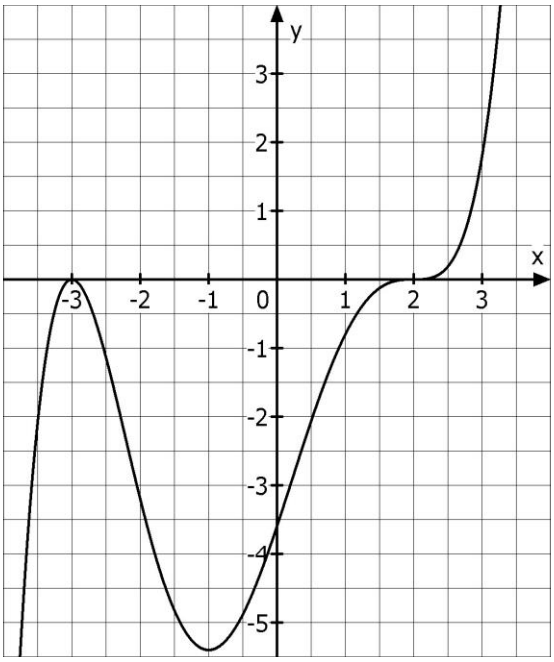
Bestimmen Sie t und prüfen Sie, ob P ein Hochpunkt von K ist. 5

Punkte

5 Die Abbildung zeigt das Schaubild der Funktion f.
Beurteilen Sie die folgenden Aussagen.

(1) $\int_0^3 f(x)dx < 0$

(2) Die Ableitungsfunktion von f hat genau zwei Nullstellen.



5

6 K ist das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{x-2} - 3;\ x \in \mathbb{R}$.
Es gibt eine Tangente an K, die mit den Koordinatenachsen ein gleichschenkliges Dreieck einschließt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt dieses gleichschenkligen Dreiecks. 4

30

Punkte

Gegeben ist für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion g durch $g(x) = -x^4 + 3x^2 + 1$.
Ihr Schaubild heißt K_g.

a) Untersuchen Sie K_g auf Symmetrie und Extrempunkte.

Begründen Sie, dass K_g die x-Achse genau zweimal schneidet.

Skizzieren Sie K_g. 9

b) Zeigen Sie, dass $y = 2x + 1$ Tangente an K_g in $P\left(1 \middle| g(1)\right)$ ist.
Bestimmen Sie den Winkel, unter dem diese Tangente die y-Achse schneidet.
K_g und die Tangente in P begrenzen zwei Flächenstücke.
Berechnen Sie den Inhalt eines der beiden Flächenstücke. 8

c) Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ schneidet für $u \in [-1; 0]$ das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^x$ im Punkt A und K_g im Punkt B.
Begründen Sie, dass der Abstand zwischen A und B am Rand des Intervalls maximal ist. 3

Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} & 3x + 4y - 2z = 1 \\ \wedge\ & -6x + 2y + 3z = -4 \\ \wedge\ & \quad 10y - z = -2 \end{aligned}$$

d) Überprüfen Sie, ob $x = 1 \wedge y = 1 \wedge z = 3$ eine Lösung dieses Gleichungssystems ist. 2

e) Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems. 2

Die jahreszeitlichen Schwankungen der Größe von Bienenvölkern sollen modelliert werden.
Hierfür wird der Einfachheit halber angenommen, dass jeder Monat 30 Tage hat.

Der Bestand eines Bienenvolkes wird beschrieben durch die Funktion b mit

$$b(t) = -10\,sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 20\,;\ 0 \le t \le 12.$$

Dabei gibt t die seit Jahresbeginn vergangene Zeit in Monaten an und $b(t)$ ist die Anzahl der Bienen dieses Volkes in Tausend zum Zeitpunkt t.

f) Zeigen Sie, dass der Bestand Ende März am geringsten ist.

Begründen Sie, dass der Bestand im Jahr durchschnittlich 20.000 Bienen zählt.

Der Imker, dem dieses Volk gehört, tätigt folgende Aussage:

„Im Mai wächst der Bienenbestand am stärksten!“

Begründen oder widerlegen Sie die Aussage des Imkers. 6

30

Punkte

Gegeben ist die Funktion f mit Schaubild K_f durch

$$f(x)=\frac{7}{2}e^{-2x^2}; \quad x\in\mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass gilt:
$f''(x)=7(8x^2-2)\cdot e^{-2x^2}$ 4

b) Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Bestimmen Sie den Wertebereich von f.

Zeichnen Sie K_f. 8

c) Für $u>0$ bilden die Punkte $O\left(0|0\right)$, $U\left(u|f(u)\right)$ und $V\left(0|f(u)\right)$ die Eckpunkte eines Dreiecks.

Berechnen Sie u so, dass der Flächeninhalt dieses Dreieck maximal wird. 5

Ein Unternehmen stellt Kochtöpfe (zylinderförmig, ohne Deckel) her.
Das aktuell meistverkaufte Modell ist ein von innen beschichteter 6-Liter-Topf (1 Liter = 1000 cm^3).

d) Geben Sie einen Term für den Inhalt der beschichteten Innenfläche in Abhängigkeit vom Radius r an.

Für welchen Radius r wird der Inhalt dieser Fläche minimal? 7

e) Lässt man das Schaubild der Funktion g mit $g(x)=3\sqrt{5x}$, $0\le x\le h$, um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper, dessen Form einem Wok ähnelt. Dabei gibt x die Höhe und g(x) den entsprechenden Radius des Rotationskörpers in cm an.

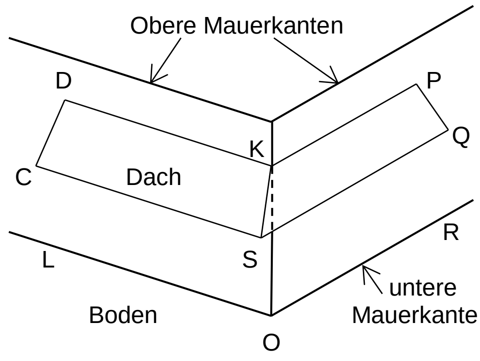
Berechnen Sie für $h=4$ cm das Rotationsvolumen.

Berechnen Sie h so, dass das Rotationsvolumen 8 Liter beträgt. 6

30

Punkte

Gemäß nebenstehender Skizze soll an das Eck einer 5 m hohen Mauer ein Dach angebracht werden. Die Mauer steht auf dem waagrechten Boden, welcher in der x_1x_2-Ebene sein soll. Der rechte Mauerteil enthält die Punkte O, R, P und K, der linke die Punkte K, D, L und O.



Das Dach ist in den Punkten D, K und P an der Mauer befestigt und besteht aus zwei trapezförmigen Teilen. Die äußeren Eckpunkte des Daches sind C, S und Q. Die Koordinaten sind in Meter angegeben und lauten:

$O(0|0|0)$, $K(0|0|4)$;

Links: $L(-3|-6|0)$, $C(-1|-7|3)$, $D(-3|-6|4)$

Rechts: $R(-4|3|0)$, $Q(-2{,}5|5|3)$, $P(-4|3|4)$

a) Zeichnen Sie die beiden Mauerteile mit ihrer oberen und unteren Kante sowie die gegebenen Eckpunkte des Daches in ein Koordinatensystem.

Bestimmen Sie zeichnerisch den Punkt S und beschreiben Sie dessen Konstruktion. 6

b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden an, in der die Dachkante CS liegt.

Bestätigen Sie durch Rechnung, dass $S\left(\frac{65}{22}\middle|\frac{10}{22}\middle|3\right)$ der vordere Eckpunkt ist. 5

c) Bestimmen Sie eine parameterfreie Gleichung der Ebene, in der sich das linke Mauerteil befindet.

Bestimmen Sie den Abstand des Punktes C von der Mauer. 6

d) Unter der Dachneigung versteht man den Winkel eines Daches zur Horizontalen. Bestimmen Sie die Dachneigung des rechten Dachteils. 5

e) Am Nachmittag scheint die Sonne in Richtung des Vektors $\vec{s} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ auf das Dach.

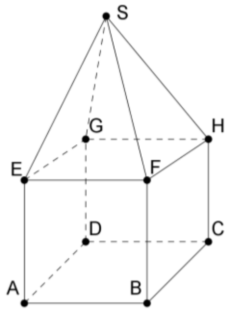
Bestimmen Sie die Schattenpunkte der Dachecken C und Q auf dem Boden.

Die Schattenlinie der linken Dachkante CD ist zum Teil auf dem Boden, aber auch an der Mauer zu sehen.
Bestimmen Sie die Schattenlinie und zeichnen Sie diese ein. 8

30

Punkte

Ein Turm hat die Form eines Quaders, auf den ein pyramidenförmiges Dach aufgesetzt wurde. Die Punkte $A\,(3{,}5|-4{,}5|0)$, $B\,(3{,}5|5{,}5|0)$ und $C\,(-6{,}5|5{,}5|0)$ sind Eckpunkte der Grundfläche, wobei eine Längeneinheit einem Meter entspricht. Der Quader ist 12 m hoch und der gesamte Turm hat eine Höhe von 20 m.



a) Zeigen Sie, dass die Dachspitze S die Koordinaten $S\,(-1{,}5|0{,}5|20)$ besitzt.

Berechnen Sie die Länge der Dachkante $\overline{FS}$ des Turmes. 7

b) Bestimmen Sie eine Gleichung der Ebene E_1, die die Dachfläche EFS enthält, in parameterfreier Form.

Eine benachbarte Dachfläche liegt in der Ebene $E_2:\ 8x_2 + 5x_3 = 104$.

Um welche Dachfläche handelt es sich?
Berechnen Sie den Winkel zwischen diesen beiden Dachflächen. 7

c) Die Gerade g enthält die Kante $\overline{FS}$. Die Gerade h geht durch die Punkte E und H.

Zeigen Sie, dass die beiden Geraden g und h windschief zueinander sind und bestimmen Sie deren Abstand. 6

Über dem Turm sind zwei Flugzeuge zu sehen die sich aufeinander zu bewegen. Beide Flugzeuge bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Der Boden liegt in der x_1-x_2-Ebene. x_1-x_2-Ebene. Ihre Flugbahn kann mit den folgenden Geradengleichungen beschrieben werden kann:

Flugzeug I: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5475 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 160 \\ 10 \end{pmatrix}$; Flugzeug II: $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 0 \\ 4500 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -50 \\ 60 \\ 20 \end{pmatrix}$

(Koordinatenangaben der Geradengleichungen in Meter, t in Sekunden)

d) Begründen Sie, ob die Flugzeuge im Steigflug oder im Sinkflug sind.

Geben Sie die Geschwindigkeit von Flugzeug I an. 4

e) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, in dem sich beide Flugzeuge auf gleicher Höhe befinden. 2

f) Begründen Sie, dass die Flugzeuge innerhalb des Intervalls $0 < t < 30$ die geringste Entfernung voneinander haben. 4

30

Punkte

Um das Glücksspielverhalten in Deutschland zu untersuchen, wurde im Dezember 2006 eine repräsentative Untersuchung durchgeführt.
Von den 8000 Befragten nahmen in den letzten 12 Monaten 39,2 % an einem Glückspiel teil.

a) Bei einer Folgeuntersuchung werden 125 Personen befragt.

Erklären Sie warum für die folgende Berechnungen die Formel von Bernoulli verwendet werden kann und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: Genau 50 Befragte nehmen an einem Glücksspiel teil.

B: Höchstens 40 Personen nehmen an einem Glücksspiel teil. 7

b) Unter den 8000 Befragten weisen 0,5 % eine pathologische Spielsucht auf.
Ein Medizinstudent möchte sich die Fragebögen der Untersuchung vom Dezember 2006 genauer anschauen.

Wie viele Fragebögen muss er mindestens durchgehen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 96 % mindestens drei Fragebögen pathologisch Spielsüchtiger zu finden? 5

c) 30 % der 8000 Befragten spielen Zahlenlotto. Von diesen nehmen 46 % an keinem weiteren Glückspiel teil.
Wie viele Befragte spielen entweder Zahlenlotto oder ein anderes Glücksspiel?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt ein Befragter ein anderes Glückspiel?
Mit welcher Wahrscheinlichkeit spielt ein Spieler anderer Glückspiele auch Zahlenlotto? 7

d) Ein Geldspielautomat hat drei identische Räder mit einem rotem, einem gelben und einem blauen Feld. Jede Farbe wird mit der gleichen Wahrscheinlichkeit angezeigt. Nach Einwurf des Einsatzes von 1 € drehen sich die Räder und stoppen zufällig. Die Auszahlung beträgt 3 €, wenn alle drei Räder die gleiche Farbe anzeigen und 50 Cent bei zwei gleichen Farben.

Mit welchem durchschnittlichen Gewinn pro Spiel kann der Betreiber dieses Geldspielautomaten langfristig rechnen? 5

e) Pokerwürfel zeigen an den sechs Flächen die Kartensymbole Ass, König, Dame, Bube, Zehn und Neun. Es wird mit fünf Würfeln gleichzeitig gewürfelt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit fallen beim Würfelpoker bei einem Wurf

- fünf gleiche Symbole (Five of a kind)
- je eine Neun, Zehn, Bube, Dame, König (Low straight)?

Begründen Sie, welche der beiden folgenden Formeln die Wahrscheinlichkeit für genau ein Paar aus zwei gleichen Würfelseiten (One pair) richtig angibt.

$$P(\text{One Pair 1}) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{5}{2}}{6^5} \quad \text{oder} \quad P(\text{One Pair 2}) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5}$$

6

30

Punkte

Als Händigkeit bezeichnet man die bevorzugte Verwendung einer bestimmten Hand.
Im Folgenden wird von einem Linkshänderanteil von 13 % ausgegangen.

a) Bei der Anmeldung werden die Schüler nach ihrer Händigkeit gefragt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind unter den 10 ersten Anmeldungen

- die ersten drei Schüler Linkshänder?
- nur der erste und der letzte Schüler Linkshänder?
- der erste Schüler Rechtshänder, der zweite Schüler Linkshänder und unter den restlichen Schülern mehr als 6 Schüler Rechtshänder? 8

b) Im Werkraum der Schule gibt es 22 Rechtshänder- und 4 Linkshänder-Scheren.
Eine Klasse mit 21 Schülern arbeitet im Werkraum mit den Scheren.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

A: In dieser Klasse wird keine Linkshänder-Schere benötigt.

B: In dieser Klasse werden drei Linkshänder-Scheren benötigt.

C: Die Linkshänder-Scheren reichen für diese Klasse nicht aus. 8

c) Eine Lehrerin vermutet einen Anstieg des durchschnittlichen Anteils der Linkshänder.
Im Jahr 2016 sind 16 von 90 Schülern Linkshänder.

Kann die Vermutung der Lehrerin bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5 % bestätigt werden?

Was wäre hier ein Fehler 2. Art? 6

d) Im Einschulungsjahrgang 2017 sind 8 von 84 Kindern Linkshänder. Die Kinder werden nach dem Zufallsprinzip in die Klassen 1a bis 1d mit je 21 Schülern aufgeteilt.

Bestätigen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1) Die Wahrscheinlichkeit, dass in der Klasse 1a nur Rechtshänder sind, ist größer als die Wahrscheinlichkeit, dass genau vier Linkshänder in der Klasse sind.
2) Mit einer Wahrscheinlichkeit von weniger als 4 % befinden sich in allen vier Klassen gleich viele Linkshänder. 8

30

Punkte

Drei Firmen K, L und M sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Folgende Technologiematrix beschreibt die Verflechtung:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

a) In einer zurückliegenden Periode wurden 100 Mengeneinheiten (ME) von K, 30 ME von L und 60 ME von M produziert.
Erstellen Sie für diese Produktion eine Input-Output-Tabelle. 5

b) In der aktuellen Periode beträgt die Nachfrage bei dem Produkt von K 68 ME und von L 17 ME. Die Nachfrage nach den Produkten der Firma M steigt voraussichtlich. Es wird daher geplant, die Produktion in Firma M auf 130 Einheiten zu erhöhen.
Um wie viel Prozent müssten die Firmen K und L in diesem Fall ihre Produktion im Vergleich zur Produktion in der zurückliegenden Periode von Teilaufgabe a) steigern, und wie viele ME würde M an den Markt abgeben? 7

c) Die Firma M ist in einer weiteren Periode in ihrer Produktion variabel. Sie kann m Einheiten erzeugen, während Firma K 100 Einheiten und Firma L 30 Einheiten herstellen können.
Bestimmen Sie $m \in \mathbb{N}$ so, dass die Komponenten des Marktvektors natürliche Zahlen sind und Firma K mindestens 68 ME an den Markt abgibt. 5

Punkte

In einem Unternehmen werden aus den Rohstoffen R_1 und R_2 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 gefertigt. Aus diesen fertigt man die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.

Die jeweils benötigten Mengeneinheiten je Mengeneinheit (ME) sind den folgenden Tabellen zu entnehmen:

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	3	1
R_2	0	2	4

	E_1	E_2	E_3
Z_1	1	1	a
Z_2	3	2	b
Z_3	1	2	c

	E_1	E_2	E_3
R_1	12	10	19
R_2	10	12	14

d) Bestimmen Sie die positiven, ganzzahligen Lösungen für a, b und c. 4

Für die folgenden Teilaufgaben gilt: $a = 4$ $b = 3$ und $c = 2$ und nachstehende Tabelle gibt die Kosten in Geldeinheiten (GE) je ME an.

R_1	R_2	Z_1	Z_2	Z_3	E_1	E_2	E_3
1	2	3	4	2	4	2	3

e) Das Unternehmen nimmt einen Auftrag über 35 ME von E_1, 27 ME von E_2 und 30 ME von E_3 an.

Berechnen Sie den Bedarf an Zwischenprodukten sowie die Gesamtkosten für diesen Auftrag. 5

f) Der Preis je ME für Rohstoff R_2 ist jetzt aufgrund markttechnischer Schwankungen flexibel.

Ein Vertreter legt der Unternehmensleitung ein Angebot über 150 ME von Z_1, 200 ME von Z_2 und 100 ME von Z_3 zu einem Gesamtpreis von 3600 GE vor.

Überprüfen Sie, bis zu welchem Preis je ME von R_2 die Eigenproduktion günstiger ist als das Angebot. 4

30

Punkte

Eine Juniorenfirma stellt aus den Rohstoffen R_1, R_2, R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 und aus diesen die Endprodukte E_1, E_2, E_3 her. Die benötigten Mengen je Mengeneinheit (ME) sind den Tabellen (alle Angaben in ME) zu entnehmen.

	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	1	4	1
R_2	2	0	4
R_3	2	1	0

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	1
Z_2	1	2	1
Z_3	1	1	2

	E_1	E_2	E_3
R_1	a	9	7
R_2	8	4	10
R_3	5	b	3

a) Zeigen Sie, dass a = 7 und b = 2 gilt. 2

b) Die Mengen der gefertigten Endprodukte E_1, E_2 und E_3 stehen im Verhältnis 1:2:3. Es werden 230 ME von R_1 verarbeitet. Berechnen Sie, wie viele ME der einzelnen Endprodukte dann hergestellt werden.
Welche Mengen der Rohstoffe R_2 und R_3 werden dafür benötigt? 5

c) Für einen Auftrag, bei dem von Z_3 so viele ME hergestellt werden wie von Z_1 und Z_2 zusammen, fallen insgesamt Rohstoffkosten in Höhe von 190 Geldeinheiten (GE) an.
Die Kosten je ME R_1 betragen 5 GE, je ME R_2 3 GE und je ME R_3 4 GE.
Wie viele ME der Rohstoffe R_2 und R_3 werden unter Einsatz von 16 ME von R_1 bei diesem Auftrag verbraucht? 7

Die zur Produktion benötigten Rohstoffe werden von drei nach dem Leontief-Modell miteinander verflochtenen Betrieben U, V und W geliefert. Für die aktuelle Periode werden folgende Lieferungen beobachtet:

	U	V	W	Markt
U	2	2	2	18
V	0	4	2	14
W	4	2	0	26

Punkte

d) Erstellen Sie die Technologiematrix $\boldsymbol{A}$ und interpretieren Sie das Element a_{31}.

In einer anderen Periode produziert Unternehmen U im Wert von 12 Geldeinheiten (GE), Unternehmen V im Wert von 20 GE und Unternehmen W im Wert von 16 GE. Erstellen Sie das Verflechtungsdiagramm für diese Periode. 7

e) Florian behauptet, dass die Matrix $\boldsymbol{B}$ mit $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \frac{25}{12} & \frac{5}{3} & \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{17}{12} & \frac{7}{3} & \frac{9}{4} \end{pmatrix}$ die zur Matrix $\boldsymbol{A}$ passende Leontief-Inverse sei.

Überprüfen Sie, ob Florians Behauptung der Wahrheit entspricht. 3

Die Juniorenfirma möchte ihren Gewinn beim Verkauf der Endprodukte maximieren. Dabei gelten folgende Einschränkungen:

Es stehen 920 m² Lagerfläche zur Verfügung. Die Gesamtverpackungszeit von 370 Minuten darf nicht überschritten werden. Die Gesamttransportkosten dürfen 420 GE nicht übersteigen. Der benötigte Lagerplatz pro ME beträgt 1 m² für E_1 und jeweils 4 m² für E_2 und E_3. Für das Verpacken pro ME werden für E_1 4 Minuten, für E_2 2 Minuten und für E_3 eine Minute gebraucht. Die Transportkosten liegen für E_1 und E_2 jeweils bei 1 GE pro ME und für E_3 bei 2 GE pro ME.

Pro ME lässt sich ein Gewinn von 2 GE bei E_1, 3 GE bei E_2 und 5 GE bei E_3 erzielen. Von E_1 werden 20 ME verkauft.

f) Bestimmen Sie die Verkaufsmengen von E_2 und E_3, für die der Gewinn maximal wird und geben Sie den maximalen Gewinn an. 6

30