Lösungsvorschlag

Punkte

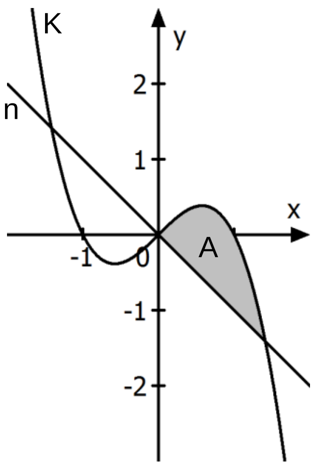
1 Amplitude: $a = \frac{2-(-1)}{2} = \frac{3}{2}$

Periode: $p = 3$, daraus ergibt sich der Faktor $b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Verschiebung in y-Richtung: $c = \frac{2+(-1)}{2} = \frac{1}{2}$ 3

2 $f(x) = -x^3 + x$ und $f'(x) = -3x^2 + 1$

Skizze zur Veranschaulichung:



Da f eine Polynomfunktion 3. Grades und K symmetrisch zum Ursprung ist, ist der Ursprung der Wendepunkt.

Steigung der Normalen: $m_n = -\frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{1} = -1$,

also ist die Normale n: $y = -x$ 2

Schnittstellen von K und n:

$f(x) = -x \;\Leftrightarrow\; -x^3 + x = -x \;\Leftrightarrow\; -x^3 + 2x = 0 \;\Leftrightarrow$

$-x(x^2 - 2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0 \vee x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2}$ 2

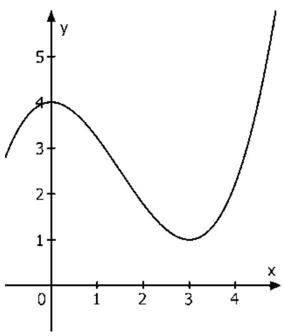
Inhalt der rechten Teilfläche:

$$A = \int_0^{\sqrt{2}} (f(x) - (-x))dx = \int_0^{\sqrt{2}} \left(-x^3 + 2x\right)dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + x^2\right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{4}\cdot 4 + 2 = 1$$ 2

3 Eigenschaften des Schaubilds von f: 3

(1) Das Schaubild geht durch P(3|1).
(2) Das Schaubild hat im Schnittpunkt mit der y-Achse eine waagerechte Tangente.
(3) Das Schaubild fällt für $0 < x < 3$.
(4) Das Schaubild ist linksgekrümmt für $x > 3$. 4

Skizze:



Lösungsvorschlag

Punkte

4 $f(2)=4 \;\Leftrightarrow\; 4=\frac{1}{4}\cdot 2^4-2\cdot 2^3+2\cdot t\cdot 2^2 \;\Leftrightarrow\; 4=-12+8\cdot t \;\Leftrightarrow\; t=2$ 2

Ist P Hochpunkt von K?

$f'(x)=x^3-6x^2+8x\,;\quad f''(x)=3x^2-12x+8$

$f'(2)=2^3-6\cdot 2^2+8\cdot 2=0$

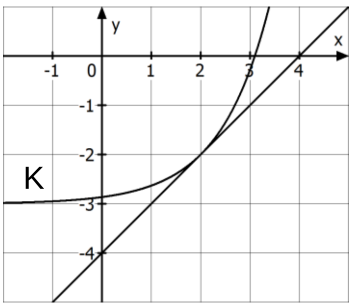
$f''(2)=3\cdot 2^2-12\cdot 2+8=-4<0$

Damit ist gezeigt, dass P ein Hochpunkt von K ist. 3

5 (1) Wahr, da im Intervall $[0\,;\,3]$ der Anteil der Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse, der unterhalb der x-Achse liegt, größer ist, als der, der oberhalb der x-Achse liegt. 3

(2) Falsch, da es drei Stellen gibt, an denen das Schaubild eine waagerechte Tangente hat: $x=-3$ (Hochpunkt), $x=1$ (Tiefpunkt), $x=2$ (Sattelpunkt). 2

6



$f(x)=e^{x-2}-3\,;\quad f'(x)=e^{x-2}$

$f'(x)>0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, daher kann sich nur ein gleichschenkliges Dreieck ergeben, wenn die Tangente die Steigung 1 hat.

$f'(x)=1 \;\Leftrightarrow\; e^{x-2}=1 \;\Leftrightarrow\; x-2=0 \;\Leftrightarrow\; x=2$

$f(2)=-2$

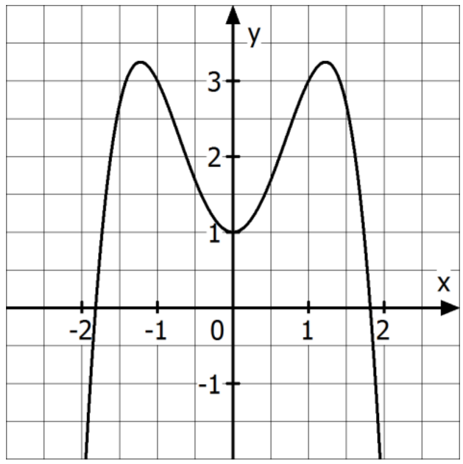
Tangente an der Stelle $x=2$: $\quad y=1\cdot(x-2)+f(2) \;\Leftrightarrow\; y=x-4$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8$ 4

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Wegen $g(-x) = g(x)$ ist K_g symmetrisch zur y-Achse. 1



Ableitungen:
$g'(x) = -4x^3 + 6x$
$g''(x) = -12x^2 + 6$.
Dann gilt
$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-4x^2 + 6) = 0 \Rightarrow x = 0$
oder $-4x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$.
Aus $g''(0) = 6$ und $g(0) = 1$ folgt, dass K_g den Tiefpunkt $T(0|1)$ besitzt. 2

Aus $g''(\sqrt{\frac{3}{2}}) = -12$ und $g(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \frac{13}{4}$ folgt, dass K_g den Hochpunkt $H_1(\sqrt{\frac{3}{2}}|\frac{13}{4})$ besitzt.

Wegen der Symmetrie gibt es den weiteren Hochpunkt $H_2(-\sqrt{\frac{3}{2}}|\frac{13}{4})$. 4

K_g ist das Schaubild einer Funktion 4. Grades, das vom 3. in den 4. Quadranten verläuft.
Da alle Extrempunkte oberhalb der x-Achse liegen, muss das Schaubild diese genau zweimal schneiden. 2

b) Wegen $y = 2 \cdot 1 + 1 = 3 = g(1)$ haben die beiden Schaubilder den Punkt P gemeinsam.
Wegen $g'(1) = 2$ haben die beiden Schaubilder in P zusätzlich die gleiche Steigung.
Somit berühren sie sich und die Gerade ist Tangente an K_g in P. 2

Für den Winkel unter welchem die Tangente die x-Achse schneidet, gilt:
$\tan(\beta) = m \Leftrightarrow \tan(\beta) = 2 \Leftrightarrow \beta = 63{,}43°$.
Daraus folgt für den Schnittwinkel der Tangente mit der y-Achse, dass
$\alpha = 90° - \beta = 90° - 63{,}43° = 26{,}57°$ gilt. 2

Weiter gilt $g(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow -x^4 + 3x^2 + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow -x^4 + 3x^2 - 2x = 0$.
Mit Hilfe des WTR findet man die Lösungen $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ und $x_3 = -2$. Da es sich bei $x_2 = 1$ um eine Berührstelle und somit um eine doppelte Lösung handelt, können die Tangente und das Schaubild keine weiteren gemeinsamen Punkte haben. Deshalb gilt

$$A = \int_0^1 \left(2x + 1 - \left(-x^4 + 3x^2 + 1\right)\right)dx = \int_0^1 \left(x^4 - 3x^2 + 2x\right)dx = \left[\frac{1}{5}x^5 - x^3 + x^2\right]_0^1 = \frac{1}{5}.$$

Der Inhalt der anderen Fläche beträgt $\frac{28}{5}$. 4

Lösungsvorschlag

Punkte

c) Die Funktion f ist für $x \in \mathbb{R}$ monoton wachsend. Da die Funktion g in $x_H = -\sqrt{\frac{3}{2}} < -1$ eine Maximalstelle, in $x_T = 0$ eine Minimalstelle besitzt und dazwischen keine weiteren Nullstellen von g' existieren, ist g für $-1 \le u \le 0$ monoton fallend. Wegen $f(-1) = e^{-1} \approx 0{,}37$ und $g(-1) = 3$, sowie $f(0) = g(0) = 1$ gilt auf Grund der Monotonie beider Funktionen, dass $g - f$ monoton fallend und daher für $x = -1$ maximal ist. D. h., der Abstand der Punkte A und B ist für $u = -1$ maximal. 3

d) Einsetzten der Werte in die linke Seite der zweiten Gleichung ergibt $-6 \cdot (1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot (1) = -1 \neq -4$.
Somit sind die angegebenen Werte keine Lösung des linearen Gleichungssystems. 2

e) Addiert man das Zweifache der ersten Gleichung zur Zweiten, so erhält man die dritte Gleichung. Damit besitzt das LGS unendlich viele Lösungen. 2

f) Mit $b'(t) = -\frac{5\pi}{3} cos\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ gilt: $b'(t) = 0 \Leftrightarrow t_1 = 3 \vee t_2 = 9$. Weiter gilt $b(3) = 10$ und $b(9) = 30$. Aus $b(0) = b(12) = 20 > 10$ folgt schließlich, dass der Bestand bei $t = 3$, d. h. im März, am geringsten ist. 2

Für den durchschnittlichen Bestand an Bienen betrachtet man

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} b(t)dt = \frac{1}{12}\int_0^{12}\left(-10 sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 20\right)dt = \frac{1}{12}\left[\frac{60}{\pi} cos\left(\frac{\pi}{6}t\right) + 20t\right]_0^{12} = 20.$$

Damit liegt der durchschnittliche Bienenbestand im Laufe eines Jahres bei 20.000 Bienen. 2

Um den Zeitpunkt des größtmöglichen Wachstums des Bestandes zu ermitteln, betrachtet man den Wendepunkt des Schaubildes von b mit positiver Steigung. Da das Schaubild von b einen Tiefpunkt bei $T(3|10)$ und einen Hochpunkt bei $H(9|30)$ besitzt, muss bei $W(6|b(6))$ ein Wendepunkt mit positiver Steigung liegen. D. h., der Bestand wächst nicht im Mai sondern im Juni am stärksten. Die Aussage ist also falsch. 2

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Ableitungen: $f'(x) = \frac{7}{2} \cdot (-4x) \cdot e^{-2x^2} = -14x \cdot e^{-2x^2}$

$$f''(x) = -14 \cdot e^{-2x^2} - 14x \cdot (-4x) \cdot e^{-2x^2}$$

$$f''(x) = -14 \cdot e^{-2x^2} + 56x^2 \cdot e^{-2x^2}$$

$$f''(x) = 7\left(8x^2 - 2\right) \cdot e^{-2x^2}$$ 4

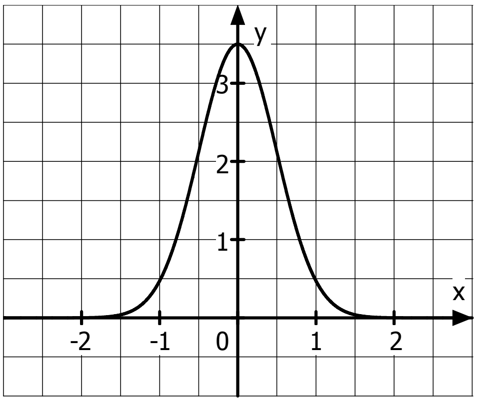
b) Symmetrie: Wegen $f(-x) = f(x)$ ist K_f symmetrisch zur y-Achse. 1

Wertebereich:

Wegen $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, $f''(0) = -14 < 0$ und $f(0) = \frac{7}{2}$ besitzt K_f den Hochpunkt $H\left(0 \middle| \frac{7}{2}\right)$.

Außerdem besitzt K_f für $x \to \pm\infty$ die Asymptote $y = 0$ und es ist $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit folgt der Wertebereich: $W_f = \left]0; \frac{7}{2}\right]$. 4



3

c) Flächeninhalt A: $A(u) = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u) = \frac{u}{2} \cdot \frac{7}{2} e^{-2u^2} = \frac{7}{4} u \cdot e^{-2u^2}$, $u > 0$

Extremale Fläche: $A'(u) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{2}$

Da für $u \to 0$ und für $u \to \infty$ der Flächeninhalt des Dreiecks gegen Null geht, stets positiv ist und $u = \frac{1}{2}$ die einzige Nullstelle der 1. Ableitung ist, muss $A(u)$ dort maximal sein. 5

Lösungsvorschlag

Punkte

d) Die beschichtete Fläche besteht aus der Grundfläche und dem Mantel.

$$A = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot h$$

Volumenbedingung $V = \pi \cdot r^2 \cdot h \quad \Leftrightarrow \quad h = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$ mit $r > 0$

Damit folgt: $A(r) = \pi \cdot r^2 + 2\pi \cdot r \cdot \frac{V}{\pi \cdot r^2} \quad \Leftrightarrow \quad A(r) = \pi \cdot r^2 + \frac{2V}{r}$ mit $r > 0$ 3

Minimale Fläche: $A'(r) = 2\pi \cdot r - \frac{2V}{r^2}$

Bedingung: $A'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = \frac{V}{\pi} \quad \Leftrightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$

Umrechnung: $6 \text{ Liter} = 6\,\text{dm}^3 = 6000\,\text{cm}^3$

Eingesetzt: $r = \sqrt[3]{\frac{6000\,\text{cm}^3}{\pi}} \approx 12{,}4\text{ cm}$

Für einen Radius von etwa 12,4 cm wird die beschichtete Fläche minimal. 4

e) Rotationsvolumen (Volumen des Woks):

Randfunktion: $g(x) = 3\sqrt{5x}$;

Grenzen: Null und h = 4 (cm):

$$V_4 = \pi \cdot \int_0^h (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^4 (45x)\,dx = \pi \cdot \left[22{,}5x^2\right]_0^4 = \pi \cdot 22{,}5 \cdot 4^2 - 0 = 360\pi \approx 1131 \text{ (cm³)}$$

Das Rotationsvolumen beträgt etwa 1,13 Liter. 3

Volumen soll nun 8000 (cm³) betragen:

$$V_h = \pi \cdot \int_0^h (g(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^h (45x)\,dx = \pi \cdot \left[22{,}5x^2\right]_0^h = \pi \cdot 22{,}5 \cdot h^2 - 0 = 22{,}5\pi \cdot h^2$$

$V_h = 8000 \quad \Leftrightarrow \quad 22{,}5\pi \cdot h^2 = 8000 \quad \Leftrightarrow \quad h = \sqrt{\frac{3200}{9\pi}}$, also $h \approx 10{,}64$ (cm)

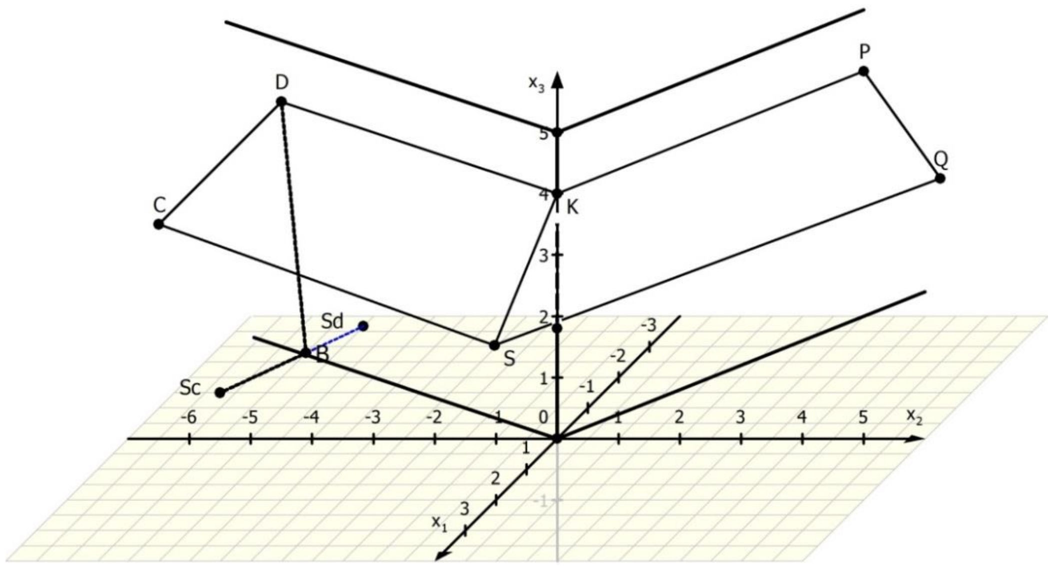
Das Rotationsvolumen ist 8 Liter, wenn h etwa 10,6 cm ist. 3

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Zeichnung der Mauer und des Daches:



5

Der Schnittpunkt der Parallelen zu *DK* durch *C* und der Parallelen zu *KP* durch *Q* ist der gesuchte Punkt *S*. 1

Sc ist Schattenpunkt von *C*, *Sd* ist (gedachter) Schattenpunkt von *D*.
Schatten von *CD* ist auf dem Boden *ScB* und an der Mauer die Strecke *DB.* e) 2

b) Gerade *CS*: $\vec{x} = \overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{DK}$ Gerade *QS*: $\vec{x} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{PK}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1

Schnittpunkt der Geraden *CS* und *QS* ist der gesuchte Punkt *S*:

$$\overrightarrow{OC} + r \cdot \overrightarrow{DK} = \overrightarrow{OQ} + t \cdot \overrightarrow{PK}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 3r - 4t = -1{,}5 \\ 6r + 3t = 12 \\ 3 = 3 \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \left| \begin{array}{r} 3r - 4t = -1{,}5 \\ 11t = 15 \\ 0 = 0 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{15}{11} \quad \wedge \quad 3r - 4 \cdot \frac{15}{11} = -\frac{3}{2} \qquad \Leftrightarrow \quad t = \frac{15}{11} \quad \wedge \quad 3r = -\frac{33}{22} + \frac{120}{22}$$

$$\Leftrightarrow \quad t = \frac{15}{11} \quad \wedge \quad r = -\frac{29}{22}$$

r in *CS* eingesetzt ergibt: $\quad S\left(\frac{65}{22} \middle| \frac{10}{11} \middle| 3\right)$ 4

Lösungsvorschlag

Punkte

c) Das linke Mauerteil ist in der Ebene E_1, welche die Punkte *O*, *K*, *D* und *L* enthält.

Ebene E_1: $a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d$

Punkt *O* eingesetzt: $d = 0$

Punkt *K* eingesetzt: $4c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = 0$

Punkt *L* eingesetzt: $-3a - 6b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -2b$ 3

Wähle $b = 1$. Damit folgt: $a = -2$ und somit Ebene E_1: $-2x_1 + x_2 = 0$.

Abstand Punkt *C* zur Ebene E_1: Normalenvektor von E_1: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad |\vec{n}| = \sqrt{5}$

Abstand *C* von E_1: $d = \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-2 \cdot (-1) + (-7)\right) \right| = \left| \frac{-5}{\sqrt{5}} \right| = \sqrt{5}$ 3

d) Neigung des rechten Daches:

Normalenvektor des Bodens: $\overrightarrow{n_B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Normalenvektor des rechten Daches: $\overrightarrow{n_R} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{KP} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12{,}5 \end{pmatrix}$

Winkel zwischen $\overrightarrow{n_B}$ und $\overrightarrow{n_R}$: $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_B} \cdot \overrightarrow{n_R}}{\left|\overrightarrow{n_B}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_R}\right|} = \frac{12{,}5}{1 \cdot \sqrt{9 + 16 + 156{,}25}} \approx 0{,}928...$

$$\cos^{-1}(0{,}928...) \approx 21{,}80°$$

Die Neigung des Daches ist damit 21,8 °. 5

e) Schatten des Punktes *C* auf dem Boden ist *Sc*:

Gerade durch *C* mit Richtung $\vec{s}$: $\vec{x} = \vec{c} + u \cdot \vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$

mit $x_3 = 0$ folgt: $3 - 12u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = \frac{1}{4}$

eingesetzt ergibt: $\vec{x} = \overrightarrow{s_C} = \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ -6{,}25 \\ 0 \end{pmatrix}$, also Schatten von *C*: $S_C\left(-1{,}5 \middle| -6{,}25 \middle| 0\right)$ 3

Lösungsvorschlag

Punkte

Gedachter Schattenpunkt von *D* (ohne Mauer):

Gerade durch *D* mit Richtung $\vec{s}$: $\vec{x} = \vec{d} + w \cdot \vec{s} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} + w \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$

mit $x_3 = 0$ folgt: $4 - 12w = 0 \quad \Leftrightarrow \quad w = \frac{1}{3}$

eingesetzt ergibt: $\vec{x} = \overrightarrow{s_D} = \begin{pmatrix} -3,67 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$, also Schatten von *D*: $S_D\left(-3,67 \middle| -5 \middle| 0\right)$

Gerade durch S_C und S_D schneidet untere Mauerkante *OL* im unteren Schattenknickpunkt *U*.

Der Schatten der Dachkante *CD* besteht aus den Teilstrecken S_CU und UD. 3

Zeichnung, siehe Teil a) (2)

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Die Koordinaten von Punkt D lauten: D (-6,5|-4,5|0).

Aufstellen der Geraden $g(AC)$ und $g(BD)$:

$$g(AC): \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -4,5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g(BD): \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$g(AC) \cap g(BD)$ ergibt S^* (-1,5|0,5|0). Damit ist S (-1,5|0,5|20) der gesuchte Punkt. 4

Dachkante: zum Beispiel FS:

$$\overline{FS} = \left|\overrightarrow{FS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 64} = \sqrt{114} = 10,68$$

Die gesuchte Dachkante ist 10,68 m lang. 3

b) E (3,5|-4,5|12); F (3,5|5,5|12); S (-1,5|0,5|20)

$$E_1: \vec{x} = \overrightarrow{OE} + r \cdot \overrightarrow{EF} + s \cdot \overrightarrow{ES};\ E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -4,5 \\ 12 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$E_1:\ 8x_1 + 5x_3 = 88$$

3

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\vec{n}_{E1} \cdot \vec{n}_{E2}\right|}{\left|\vec{n}_{E1}\right| \cdot \left|\vec{n}_{E2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right|}{\left|\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{25}{\sqrt{89} \cdot \sqrt{89}} = \frac{25}{89}$$

Damit beträgt der Winkel zwischen E_1 und E_2 73,69 °. 4

Lösungsvorschlag

Punkte

c) Für die Geraden $h(EH)$ und $g(FS)$ gilt, dass…

…die Richtungsvektoren nicht linear abhängig sind.
…die beiden Geraden keinen gemeinsamen Schnittpunkt haben.
Die Gleichungen der beiden Geraden lauten:

$$h(EH):\vec{x}=\begin{pmatrix}3{,}5\\-4{,}5\\12\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-10\\10\\0\end{pmatrix}\text{ und } g(FS):\vec{x}=\begin{pmatrix}3{,}5\\5{,}5\\12\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-5\\-5\\8\end{pmatrix}$$

I. $3{,}5-5u=3{,}5-10v$ 3

II. $5{,}5-5u=-4{,}5+10v$

III. $12+8u=12\rightarrow u=0$

Mit $u=0$ führt das Gleichungssystem zum Widerspruch – die Geraden scheiden sich nicht.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind linear unabhängig:

$$\begin{pmatrix}-5\\-5\\8\end{pmatrix}\neq k\cdot\begin{pmatrix}-10\\0\\-12\end{pmatrix}$$

Abstand:

$$d=\left|\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OE}\right)\bullet\frac{\overrightarrow{n_{gh}}}{\left|\overrightarrow{n_{gh}}\right|}\right|=\left|\left(\begin{pmatrix}3{,}5\\5{,}5\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3{,}5\\-4{,}5\\12\end{pmatrix}\right)\bullet\frac{\begin{pmatrix}80\\80\\100\end{pmatrix}}{\sqrt{22.800}}\right|\approx 5{,}29\text{ LE}$$

Der Abstand der beiden Geraden beträgt 5,29 m. 3

d) Beide Flugzeuge befinden sich im Steigflug, da die x_3-Koordinaten der Richtungsvektoren positiv sind. 2

Geschwindigkeit von Flugzeug I: $\sqrt{0^2+160^2+10^2}=\sqrt{25.700}=160{,}31...$
Die Geschwindigkeit von Flugzeug I beträgt 160,3 m/s. 2

e) Gleichsetzen der beiden Geraden ergibt:

$$5.475+10t=4.500+20t$$
$$t=97{,}5$$

Die Flugzeuge erreichen nach 97,5 Sekunden die gleiche Höhe. 2

Lösungsvorschlag

Punkte

f) Für die Entfernung d gilt:

$$d = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 160t \\ 5475 + 10t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3000 - 50t \\ 60t \\ 4500 + 20t \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3000 - 50t \\ -100t \\ -975 + 10t \end{pmatrix} \right|$$

$$d(t) = \sqrt{(3000 - 50t)^2 + (-100t)^2 + (-975 + 10t)^2}$$

Für das angegebene Intervall lässt sich im WTR eine Wertetabelle anlegen, die die folgenden Werte ausgibt:

t	$d(t)$
0	3154,4
5	2944,1
10	2831,1
15	2827,2
20	2932,6
25	3136,5
30	3421,3

Da die Funktionswerte erst fallen und dann wieder steigen ist klar, dass im angegebenen Intvervall der Abstand der beiden Flugzeuge minimal sein muss. 4

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Die Zufallsvariable X zählt die Spieler; X ist $B_{125;0,392}$-verteilt.

Die Formel von Bernoulli darf hier verwendet werden, da es nur zwei mögliche Ergebnisse (Treffer oder Niete) gibt und weil sich die Wahrscheinlichkeit p für Treffer während der Durchführung des Zufallsexperiments nicht verändert. 2

$$P(A) = P(X = 50) = \binom{125}{50} \cdot 0,392^{50} \cdot 0,608^{75} \approx 0,0715$$ 2

$$P(B) = P(X \leq 40) = \sum_{k=0}^{k=40} \binom{125}{k} \cdot 0,392^{k} \cdot 0,608^{125-k} \approx 0,0584$$ 3

b) Die Zufallsvariable X zählt die pathologischen Fälle; X ist $B_{n;0,005}$-verteilt.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2)$ und $P(X \geq 3) \geq 0,96$

$P(X \leq 2) \leq 0,04$

$$\sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} 0,005^{k} \cdot 0,995^{n-k} \leq 0,04$$

$n = 1317$: $P(X \leq 2) \approx 0,0401$

$n = 1318$: $P(X \leq 2) \approx 0,0399$

Der Student muss mindestens 1318 Fragebögen überprüfen. 5

c) Mit Z für „spielt Zahlenlotto“ und G für „spielt ein anderes Glücksspiel“ ergibt sich folgendes Tableau:

	Z	$\overline{Z}$	
G	$2400 - 1104 = 1296$	$5600 - 4864 = 736$	2032
$\overline{G}$	$0,46 \cdot 2400 = 1104$	$(1 - 0,392) \cdot 8000 = 4864$	5968
	$0,3 \cdot 8000 = 2400$	5600	8000

4

Entweder Zahlenlotto oder ein anderes Glücksspiel spielen 736+1104=1840 Befragte. 1

$$P(G) = \frac{2032}{8000} = 0,2540$$

Etwa 25,4 % der Befragten spielen ein anderes Glücksspiel. 1

$$P_G(Z) = \frac{1296}{2032} \approx 0,6378$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 63,8 % spielt ein Spieler anderer Glücksspiele auch Zahlenlotto. 1

Lösungsvorschlag

Punkte

d) Das beschriebene Zufallsexperiment hat 27 mögliche Ergebnisse.
Für drei gleiche Farben gibt es drei Möglichkeiten.

P(drei gleiche Farben) $= \frac{3}{27}$

Wenn eine Farbe genau zweimal vorkommen soll, gibt es drei Möglichkeiten für das erste Rad, drei Möglichkeiten für das zweite Rad und zwei Möglichkeiten für das dritte Rad:

P(zwei gleiche Farben) $\frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{27} = \frac{18}{27}$

P(drei verschiedene Farben) $= 1 - \frac{21}{27} = \frac{6}{27}$ 3

Erwartungswert für den Gewinn des Spielers:

$$E(X) = \frac{3}{27} \cdot (3-1) + \frac{18}{27} \cdot (0,5-1) + \frac{6}{27}(0-1) = \frac{2}{9} - \frac{1}{3} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{3} \approx -0,33$$

Der Betreiber kann also langfristig mit 0,33 € Gewinn pro Spiel rechnen. 3

e) $P(\text{Five of a kind}) = \frac{6}{6^5} = \frac{1}{1296} \approx 0,0007716$

$P(\text{Low straight}) = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6^5} = \frac{120}{7776} = \frac{5}{324} \approx 0,0154$ 2

Die richtige Formel ist $P(\text{One Pair 1}) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \binom{5}{2}}{6^5} = \frac{25}{54} \approx 0,4630$, der Faktor $\binom{5}{2}$ ist notwendig, da es im Baumdiagramm insgesamt $\binom{5}{2} = 10$ Pfade für dieses Ereignis gibt. 2

Jeder dieser Pfade hat die Wahrscheinlichkeit $P(\text{One Pair 2}) = \frac{6 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6^5} \approx 0,04630$ 2

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) $p = 0{,}13^3 = 0{,}002197$ 2

$p = 0{,}13 \cdot 0{,}87^8 \cdot 0{,}13 \approx 0{,}0055$ 3

$p = 0{,}13 \cdot 0{,}87 \cdot \left(\sum_{k=7}^{8} \binom{8}{k} \cdot 0{,}87^k \cdot 0{,}13^{8-k} \right) \approx 0{,}0815$ 3

b) $P(A) = 0{,}87^{21} \approx 0{,}0537$ 2

$P(B) = \binom{21}{3} \cdot 0{,}13^3 \cdot 0{,}87^{18} \approx 0{,}238$ 3

$P(C) = \sum_{k=5}^{21} \binom{21}{k} \cdot 0{,}13^k \cdot 0{,}87^{21-k} \approx 0{,}128$ 3

c) $H_0 : p \leq 0{,}13$

$H_1 : p > 0{,}13$ (rechtsseitiger Test)

$P(X \geq g) = \sum_{k=g}^{90} \binom{90}{k} \cdot 0{,}13^k \cdot 0{,}87^{90-k} \leq 0{,}05$

$P(X \geq 17) \approx 0{,}0713 \geq 0{,}05$

$P(X \geq 18) \approx 0{,}0402 \leq 0{,}05$

Ablehnungsbereich $K = \{18;19;...90\}$

Wegen $16 \notin K$ kann die Vermutung der Lehrerin nicht bestätigt werden. 5

Einen Fehler 2. Art läge vor, die Vermutung der Lehrerin zwar richtig wäre, wegen der Stichprobe mit 16 von 19 Linkshändern die Nullhypothese aber beibehalten würde. 1

d) In der Klasse 1a sind nur Rechtshänder: $p_r = \frac{\binom{76}{21} \cdot \binom{8}{0}}{\binom{84}{21}} \approx 0{,}0888$

In der Klasse 1a sind genau vier Linkshänder: $p_l = \frac{\binom{8}{4} \cdot \binom{76}{17}}{\binom{84}{21}} \approx 0{,}0818$

Wegen $p_r > p_l$ ist die erste Aussage wahr. 4

Lösungsvorschlag

Punkte

Zwei Linkshänder pro Klasse: $p = \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{76}{19} \cdot \binom{6}{2} \cdot \binom{57}{19} \cdot \binom{4}{2} \cdot \binom{38}{19}}{\binom{84}{21} \cdot \binom{63}{21} \cdot \binom{42}{21}} \approx 0{,}0446$

Die zweite Aussage ist falsch, mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,5 % sind in allen vier Klassen gleich viele Linkshänder. 4

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Mit $\boldsymbol{A}\cdot\begin{pmatrix}100 & 0 & 0\\ 0 & 30 & 0\\ 0 & 0 & 60\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20 & 6 & 6\\ 10 & 3 & 0\\ 10 & 3 & 42\end{pmatrix}$ erhält man folgende Input-Output-Tabelle:

	K	L	M	Markt	Gesamt-produktion
K	20	6	6	68	100
L	10	3	0	17	30
M	10	3	42	5	60

5

b) Der neue Marktvektor ist $\vec{y}_b=\begin{pmatrix}68\\17\\m\end{pmatrix}$, der neue Produktionsvektor ist $\vec{x}_b=\begin{pmatrix}k\\l\\130\end{pmatrix}$ und

$(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot\vec{x}_b=\vec{y}_b \Leftrightarrow \begin{pmatrix}\frac{4k}{5}-\frac{l}{5}-13\\ -\frac{k}{10}+\frac{9l}{10}\\ -\frac{k}{10}-\frac{l}{10}+39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}68\\17\\m\end{pmatrix}$. Aus dem Tableau $\left(\begin{array}{ccc|c}\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 81\\ -\frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 & 17\\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & -1 & -39\end{array}\right)$

(Einsetzungsverfahren) ergibt sich die Lösung $k=109$, $l=31$ und $m=25$. 5

Die Steigerung der Produktion in K beträgt 9 %, in L 3,33 % und die Marktabgabe in M liegt dann bei 25 ME. 2

c)

Es ist $\vec{x}_c=\begin{pmatrix}100\\30\\m\end{pmatrix}$ und $\vec{y}_c=(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\cdot\vec{x}_c=\begin{pmatrix}74-\frac{m}{10}\\ 17\\ \frac{3m}{10}-13\end{pmatrix}$

Es muss gelten: $74-\frac{m}{10}\geq 68 \wedge \frac{3m}{10}-13\geq 0 \wedge \Leftrightarrow \frac{130}{3}\leq m\leq 60.$

Damit werden in Zweigwerk M 50 oder 60 ME produziert und mindestens 68 ME von Zweigwerk K an den Markt abgegeben. 5

d) Mit $\boldsymbol{A}_{RZ}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{B}_{ZE}=\begin{pmatrix}1 & 1 & a\\ 3 & 2 & b\\ 1 & 2 & c\end{pmatrix}$ ergibt sich $\boldsymbol{C}_{RE}=\begin{pmatrix}\ldots & \ldots & 2a+3b+c\\ \ldots & \ldots & 2b+4c\end{pmatrix}$.

Mit $2a+3b+c=19 \wedge 2b+4c=14$ ergibt sich $a=\frac{5}{2}c-1 \wedge b=7-2c$.

$\frac{5}{2}c-1>0 \wedge 7-2c>0$ ist nur dann erfüllt, wenn c die Werte 1, 2 oder 3 annimmt.

a ist nur für $c=2$ ganzzahlig und damit $a=4 \wedge b=3$. 4

Lösungsvorschlag

Punkte

e) Mit $\vec{p}_e = \begin{pmatrix} 35 \\ 27 \\ 30 \end{pmatrix}$, $\vec{k}_R = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $\vec{k}_E = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{C_{RE}} = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 19 \\ 10 & 12 & 14 \end{pmatrix}$ erhält

man die Gesamtkosten $K_{ges} = \left(\boldsymbol{\vec{k}_R} \cdot \boldsymbol{C_{RE}} + \boldsymbol{\vec{k}_Z} \cdot \boldsymbol{B_{ZE}} + \vec{k}_E\right) \cdot \vec{p}_e = 5572$.

Der Bedarf an Zwischenprodukten errechnet sich mit $\vec{z}_e = \boldsymbol{B_{ZE}} \cdot \vec{p}_e = \begin{pmatrix} 182 \\ 249 \\ 149 \end{pmatrix}$. 5

f) Mit $\vec{k}_{Rneu} = \begin{pmatrix} 1 & p \end{pmatrix}$, $\vec{k}_Z = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{z}_f = \begin{pmatrix} 150 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}$ erhält man die Gesamtkosten zur

Herstellung der Zwischenprodukte durch

$$K_{Zges} = \left(\vec{k}_{Rneu} \cdot \boldsymbol{A_{RZ}} + \vec{k}_Z\right) \cdot \vec{z}_f = 50 \cdot (16p + 49).$$

Es muss gelten: $50 \cdot (16p + 49) < 3600 \Leftrightarrow p = 1{,}4375.$

Bis zu einem Preis von 1,43 GE ist die Eigenproduktion günstiger als das Angebot. 4

30

Lösungsvorschlag

Punkte

a) Mit $\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=7$ und $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=2$ gilt a = 7 und b = 2. 2

b) Mit $\vec{p}=\begin{pmatrix}p_1\\2p_1\\3p_3\end{pmatrix}$ und $\vec{r}=\begin{pmatrix}230\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$ gilt $\vec{r}=A\cdot B\cdot\vec{p}=\begin{pmatrix}7 & 9 & 7\\8 & 4 & 10\\5 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}p_1\\2p_1\\3p_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}46p_1\\46p_1\\18p_1\end{pmatrix}$.

Daraus folgt, dass $\vec{r}=\begin{pmatrix}46p_1\\46p_1\\18p_1\end{pmatrix}\Leftrightarrow p_1=5\wedge r_2=230\wedge r_3=90$.

D. h., es können 5 ME von E_1, 10 ME von E_2 und 15 ME von E_3 hergestellt werden.
Hierfür werden 230 ME an R_2 sowie 90 ME an R_3 benötigt. 5

c) Mit $\vec{z}=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}$ und $\vec{r}=\begin{pmatrix}16\\r_2\\r_3\end{pmatrix}$ gilt

$\vec{r}=A\cdot\vec{z}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 4 & 1\\2 & 0 & 4\\2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_1+z_2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}16\\r_2\\r_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2z_1+5z_2\\6z_1+4z_2\\2z_1+z_2\end{pmatrix}$. 4

Weiter folgt mit $\vec{k}_R=\begin{pmatrix}5 & 3 & 4\end{pmatrix}$,
dass $190=\vec{k}_R\cdot\vec{r}\Leftrightarrow 190=80+3r_2+4r_3\Leftrightarrow 110=3r_2+4r_3$ gilt. Einsetzen von r_2 und r_3 ergibt nun $110=26z_1+16z_2$. Mit $z_1=8-\frac{5}{2}z_2$ folgt schließlich $z_2=2$ und somit auch $z_1=3,\ r_3=8$ sowie $r_2=26$.

D. h., es werden bei diesem Auftrag 26 ME von R_2 und 8 ME von R_3 verbraucht. 3

Lösungsvorschlag

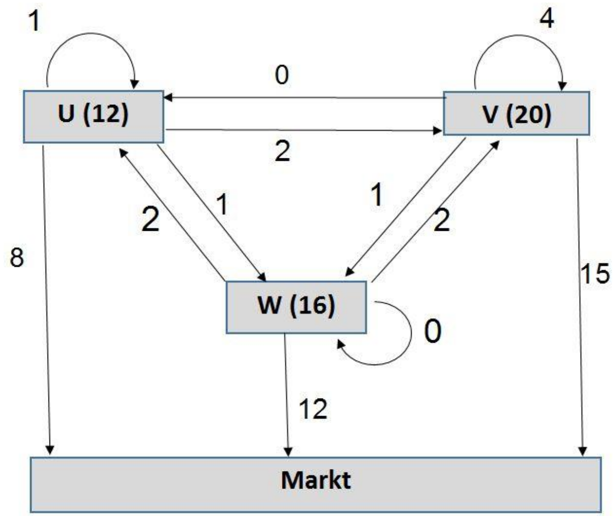
Punkte

d) Mit dem Produktionsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 24 \\ 20 \\ 32 \end{pmatrix}$ folgt $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{10} & \frac{1}{16} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{16} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & 0 \end{pmatrix}$. Das Matrixelement $a_{31} = \frac{1}{6}$

bedeutet, dass Unternehmen U $\frac{1}{6}$ ME von Unternehmen W benötigt, um 1 ME zu produzieren. 3

Weiter gilt $A \cdot \begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Als Verflechtungsdiagramm ergibt sich also



e) Es gilt $(E_3 - A) = \begin{pmatrix} \frac{11}{12} & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{16} \\ 0 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{16} \\ -\frac{1}{6} & -\frac{1}{10} & 1 \end{pmatrix}$. Multipliziert man z. B. die 1. Zeile von $(E_3 - A)$ mit

der 1. Spalte von B, erhält man $\frac{11}{12} \cdot \frac{25}{12} - \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{16} \cdot \frac{17}{12} \neq 1$.

Daher ist $(E_3 - A) \cdot B \neq E_3$ und die Aussage somit falsch. 3

Lösungsvorschlag

Punkte

f) Mit $x \geq 0$ (ME verkaufter E_2) und $y \geq 0$ (ME verkaufter E_3) ergeben sich bei 20 ME verkaufter E_1 folgende Restriktionen:

(1) $1 \cdot 20 + 4 \cdot x + 4 \cdot y \leq 920 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -x + 225,$

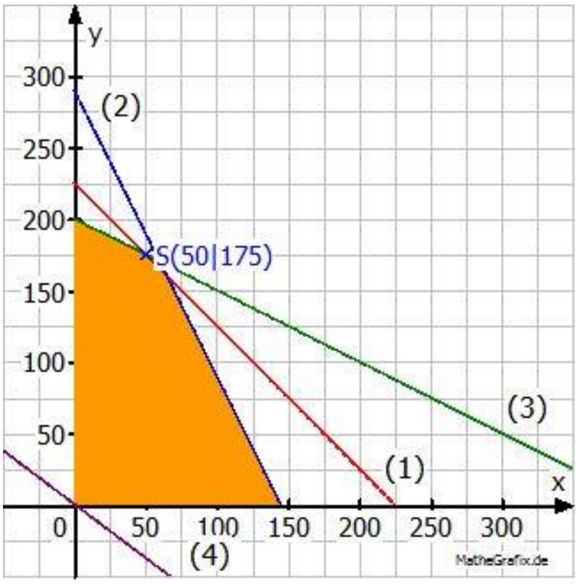
(2) $4 \cdot 20 + 2 \cdot x + 1 \cdot y \leq 370 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -2x + 290,$

(3) $1 \cdot 20 + 1 \cdot x + 2 \cdot y \leq 420 \quad \Leftrightarrow \quad y \leq -\frac{1}{2}x + 200.$

Für die Gewinnfunktion G gilt

(4) $G = 2 \cdot 20 + 3 \cdot x + 5 \cdot y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{3}{5}x + \frac{G - 40}{5}.$

Die gewinnoptimale Verkaufskombination S erhält man durch die aus (1) und (3) entstandenen Begrenzungsgeraden:



6

30