Punkte

1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{12}x^4+\frac{1}{6}x^3-3x^2+4x-2$; $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie den Bereich, in dem das Schaubild von f rechtsgekrümmt ist. 5

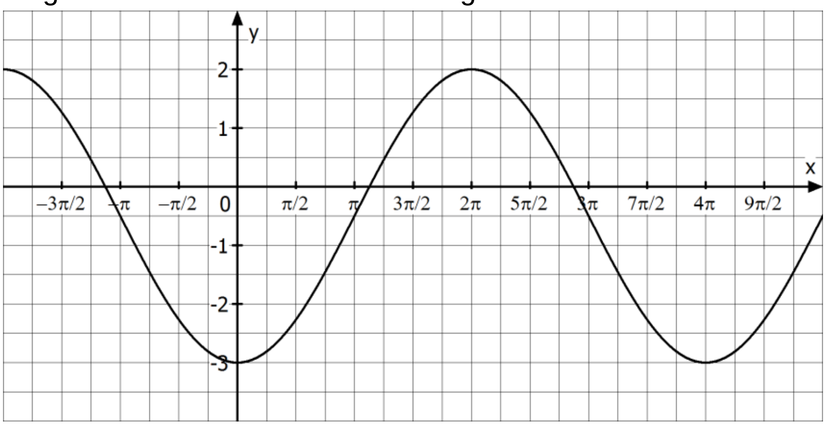
2 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x^2\cdot e^{2x}$; $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Stellen, an denen das Schaubild von f waagerechte Tangenten hat. 3

3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{3x}-4e^2+x$; $x\in\mathbb{R}$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion von f, deren Schaubild durch den Ursprung verläuft. 3

4 Gegeben ist das Schaubild einer trigonometrischen Funktion f:



Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung von f an.

Berechnen Sie den Inhalt einer der Flächen, die K mit der Geraden $y=-\frac{1}{2}$ einschließt. 5

5 Auf dem Arbeitsblatt (Seite 3) ist im oberen Koordinatensystem das Schaubild K_f einer Funktion f dargestellt.

Zeichnen Sie das Schaubild der Ableitungsfunktion von f in das untere Koordinatensystem auf dem Arbeitsblatt (Seite 3).

Nehmen Sie Stellung zu der folgenden Behauptung: Für jede Stammfunktion F von f gilt: $F(-4)\approx F(1)$. 5

Punkte

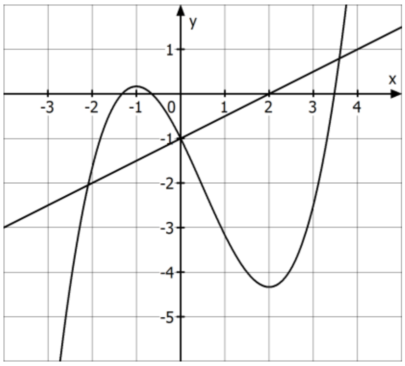
6 K ist das Schaubild einer Polynomfunktion 4. Grades.

Begründen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

(1) K hat höchstens drei gemeinsame Punkte mit der x-Achse.
(2) K hat höchstens zwei Krümmungswechsel.
(3) K hat immer mehr Extrem- als Wendepunkte. 5

7 Die Abbildung zeigt das Schaubild K einer Polynomfunktion 3. Grades sowie die Normale von K im Punkt $P(0|-1)$.

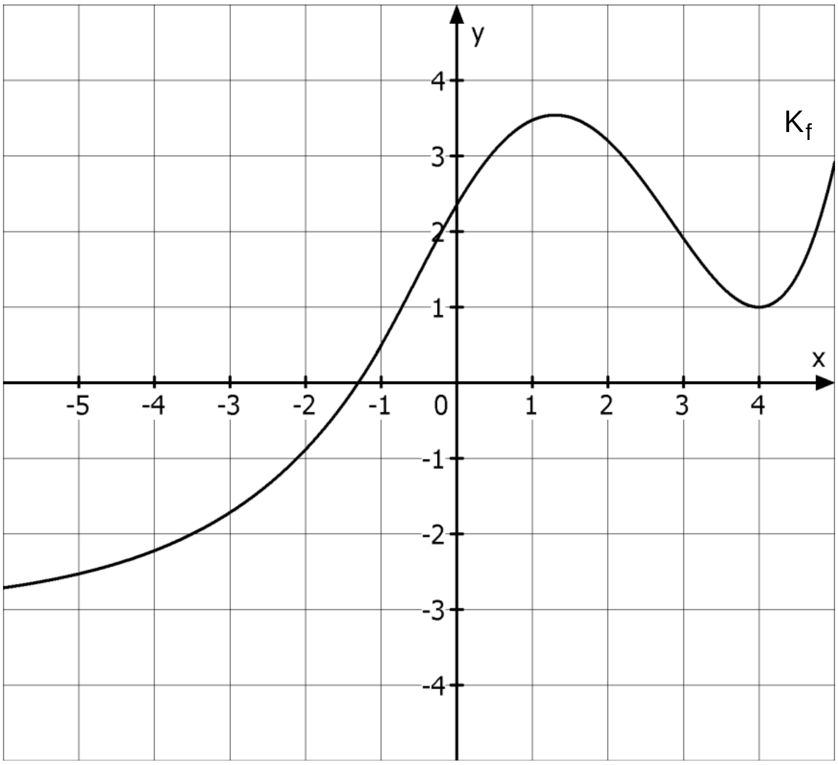
Bestimmen Sie einen Funktionsterm der zugehörigen Ableitungsfunktion. 4

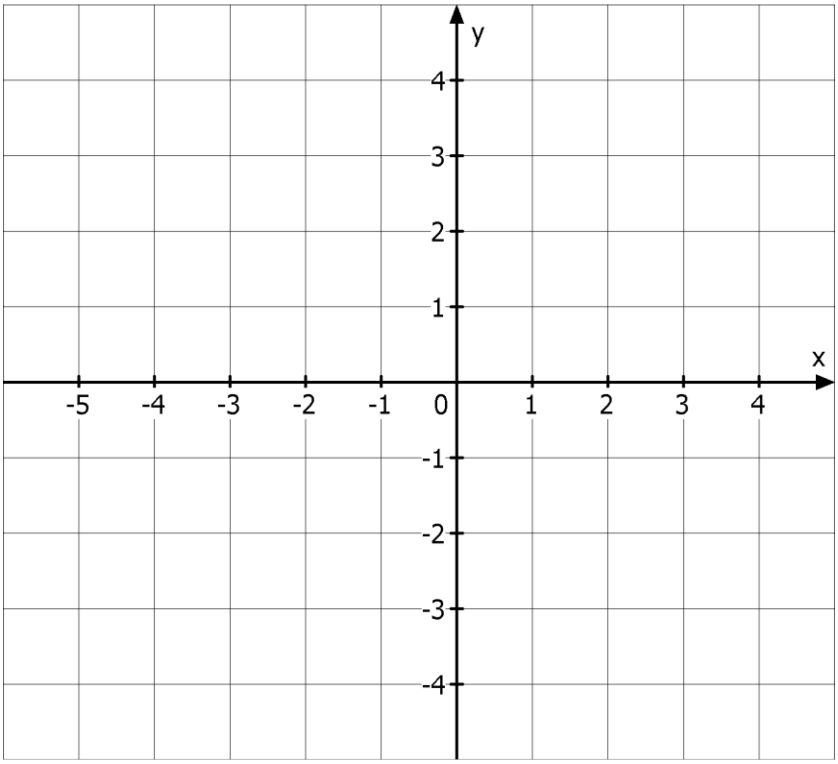


30

Punkte

Arbeitsblatt





Lösungsvorschlag

Punkte

1 $f'(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + 4$; $f''(x) = x^2 + x - 6$

Mögliche Wendestellen von f:

$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + x - 6 = 0 \;\Leftrightarrow\; (x+3)(x-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -3 \vee x = 2$

Da das Schaubild der zweiten Ableitung eine nach oben geöffnete Parabel ist, ist die zweite Ableitung zwischen ihren Nullstellen negativ, d. h. das Schaubild von f ist für $-3 < x < 2$ rechtsgekrümmt. 5

2 $f'(x) = x \cdot e^{2x} + \frac{1}{2}x^2 \cdot 2e^{2x} = x(x+1) \cdot e^{2x}$

$x = 0$ und $x = -1$ sind Nullstellen von f' und damit Stellen mit waagerechten Tangenten. 3

3 $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - 4e^2x + \frac{1}{2}x^2 + c$

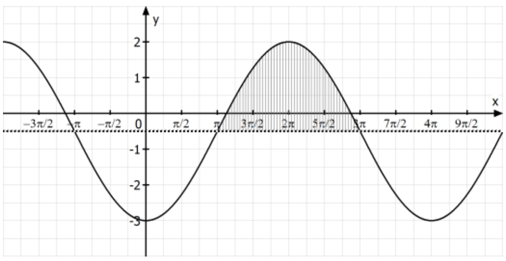
Damit das Schaubild von F durch den Ursprung verläuft, muss gelten:

$F(0) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} + c = 0 \;\Leftrightarrow\; c = -\frac{1}{3}$

und somit gilt: $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - 4e^2x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}$. 3

4 Die Periode p von f ist 4π. Die Amplitude ist $2{,}5$.
Damit ergibt sich $f(x) = -2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2}$.

Die Schnittstellen sind die Wendestellen von f, die erste positive Wendestelle liegt bei $\frac{1}{4}p$, also bei $x = \pi$ und die zweite bei $\frac{3}{4}p$, also bei $x = 3\pi$.

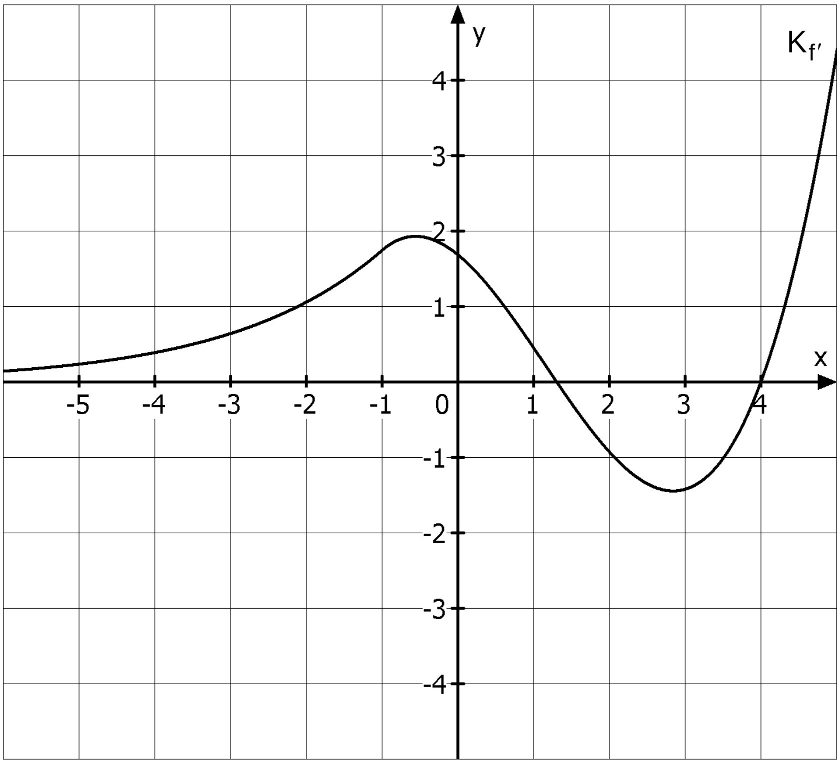


$$A = \int_{\pi}^{3\pi}\left(f(x) + \frac{1}{2}\right)dx = \int_{\pi}^{3\pi}\left(-2{,}5 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)dx = \left[-5\sin\left(\frac{1}{2}x\right)\right]_{\pi}^{3\pi} = 5 + 5 = 10$$ 5

Lösungsvorschlag

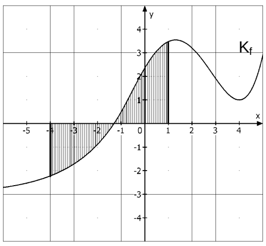
Punkte

5



Zeichnung: 3

$$F(1)-F(-4)=\int_{-4}^{1} f(x)\,dx$$

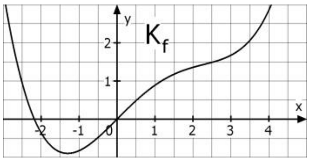


Da im Bereich $-4 \le x \le 1$ die oberhalb und unterhalb der x-Achse liegenden Anteile der Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse etwa gleich groß sind, ist das Integral näherungsweise null, die Behauptung ist wahr. 2

6 (1) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $f(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)$ 1

(2) Die Aussage ist wahr, da der Term der 2. Ableitung ein Polynom 2. Grades ist und somit maximal zwei Nullstellen hat. 2

(3) Die Aussage ist falsch, da ein Extrem- und zwei Wendepunkte möglich sind, siehe Abbildung. 2



Lösungsvorschlag

Punkte

7 Die Polynomfunktion sei p, ihre Ableitungsfunktion p'.

Das Schaubild von p hat an den Stellen $x=-1$ und $x=2$ jeweils eine waagerechte Tangente, daher gilt für p': $p'(x)=a(x+1)(x-2)$ (*).

Die Normale hat die Steigung $m=\frac{1}{2}$.

Die Steigung der Tangente in P beträgt somit -2, d. h. es gilt außerdem: $p'(0)=-2$.

Einsetzen in (*): $a(0+1)(0-2)=-2 \Leftrightarrow a=1$

Funktionsterm der Ableitungsfunktion: $p'(x)=(x+1)(x-2)$ 4