## L2\_1.1 Boolesche Algebra

**Lösungen zu L2\_1.1 Grundlagen der Booleschen Algebra**

**Bearbeitungshinweis**. Beachten Sie zur Bearbeitung der nachfolgenden Aufgabenstel­lungen das Informationsmaterial "L2\_1.1 Informationsmaterial Boolesche Algebra.docx".

Der Mühlberger SC hat in diesem Jahr sein neues Stadion eröffnet. Mit dem neuen Stadion nahm auch die Nachfrage nach Stadionführungen zu. Der Vorstand beschließt deshalb mehr­heitlich, dass in den ersten Monaten nur Mitglieder, die sich formlos mit einer E-Mail an Frau Naag (Mitgliederbetreuerin) angemeldet haben, an der Stadionführung teilnehmen dürfen.

**Aufgabe: Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, um an der Stadionführung teilzunehmen?**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Voraussetzung 1 | **Mitglied** | Voraussetzung 2 | **Anmeldung** |

**Aufgabe: Bestimmen Sie den Wahrheitswert folgender Aussagen:**

|  |  |
| --- | --- |
| Darf die Person an der Stadionführung teilnehmen(**wahr**) oder nicht (**falsch**)? | |
| Simon Amsel ist Fan des Mühlberger SC, Dauerkartenbesitzer und Mitglied. Er erscheint freudestrahlend zum ersten Termin der Stadionführungen. | **falsch** |
| Sascha Herz ist schon lange Mitglied des Mühlberger SC und hat sich zwei Wochen vor der Stadionführung bei Frau Naag angemeldet. | **wahr** |
| Robert Lampe hat eine Dauerkarte und ist im Fanclub Mitglied. Er hat sich eine Woche vor der Stadionführung bei Frau Naag angemeldet. | **falsch** |
| Bastian Schwein trifft seinen Freund Sascha Herz, als dieser in der S-Bahn auf dem Weg zur Stadionführung ist. Er beschließt ihn zu begleiten. | **falsch** |

Um den Wahrheitswert komplexer Aussagen zu bestimmen, werden diese in der Booleschen Algebra in Teilaussagen zerlegt und dann wieder mit einer entsprechenden Bedingung mit­ einander verknüpft. Die so entstehenden zusammengesetzten Aussagen lassen sich hin­sichtlich der angegebenen Verknüpfungsart wiederum auf ihren Wahrheitsgehalt überprüfen

**Verknüpfung von Aussagen**

**Aufgabe: Formulieren Sie in eigenen Worten eine Definition der Verknüpfungsart Konjunktion.**

**Konjunktion**

**Wenn zwei Aussagen mit einem UND (˄) verknüpft sind,**

**müssen beide „wahr“ sein, damit die Gesamtaussage wahr**

**ist.**

**Man spricht dann von einer Konjunktion.**

Beispiel: Umut Özgan möchte an der Stadionführung des Mühlberger SC teilnehmen. Anhand folgender Aussagen lässt sich mit Hilfe einer Wahrheitstabelle feststellen, ob dies nach den vorgegebenen Regeln möglich ist.

Aussage A: Umut Özgan ist Mitglied des Mühlberger SC

Aussage B: Umut Özgan hat sich per E-Mail zur Stadionführung angemeldet

**Aufgabe: Ergänzen Sie die Wahrheitstabelle für die Konjunktion der beiden Aus­sagen:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **A ˄ B** |
| wahr | falsch | **falsch** |
| wahr | wahr | **wahr** |
| falsch | wahr | **falsch** |
| falsch | falsch | **falsch** |

**Aufgabe: Welchen Wahrheitsgehalt müssen die einzelnen Aussagen haben, damit bei der Konjunktion von mehreren Aussagen (A ˄ B ˄ C ˄ D) die Gesamtaussage „wahr“ ist?**

**Alle Aussagen müssen „wahr“ sein, damit die**

**Gesamtaussage „wahr“ ist**

**Aufgabe: Formulieren Sie in eigenen Worten eine Definition der Verknüpfungsart Disjunktion.**

**Disjunktion**

**Wenn zwei Aussagen mit einem ODER (˅) verknüpft sind,**

**muss nur eine Aussage „wahr“ sein, damit die Gesamtaus­**

**sage „wahr“ ist.**

**Man spricht dann von einer Disjunktion.**

Beispiel: Nach der ersten Euphoriewelle nimmt das Interesse an Stadionführungen ab. Der Vorstand des Mühlberger SC beschließt, dass Mitglieder ohne Anmeldung und alle „Nicht-Mitglieder“ mit Anmeldungen an einer Stadionführung teilnehmen können.

Aussage A: Umut Özgan ist Mitglied des Mühlberger SC

Aussage B: Umut Özgan hat sich per E-Mail zur Stadionführung angemeldet

**Aufgabe: Entscheiden Sie, ob Umut Özgan an der Stadionführung teilnehmen darf, indem Sie die Wahrheitstabelle für die Disjunktion der beiden Aussagen ergänzen:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **C = A ˅ B** |
| wahr | falsch | **wahr** |
| wahr | wahr | **wahr** |
| falsch | wahr | **wahr** |
| falsch | falsch | **falsch** |

Hinweis: In der Informatik werden die Wahrheitswerte „falsch“ und „wahr“ oft durch 0 und 1 ersetzt. Dabei steht 0 für „falsch“ und 1 für „wahr“.

**Aufgabe: Ergänzen Sie folgende Wahrheitstabelle mit den Werten 0 und 1**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **A ˄ B** | **A ˅ B** |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| **1** | **1** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **0** | **0** | **0** |

**Aufgabe: Formulieren Sie in eigenen Worten eine Definition der Negation.**

**Negation**

**Die Negation einer Aussage ist immer dann wahr, wenn**

**Die Aussage falsch ist, und immer dann falsch, wenn die**

**Aussage wahr ist.**

Der Wahrheitswert einer **Negation** kann ebenfalls mit Hilfe einer Wahrheitstabelle ermittelt werden.

Beispiel: Aussage A: Umut Özgan nimmt an der Stadionführung teil

**Aufgabe: Ergänzen Sie die Wahrheitstabelle für die Negation der Aussage:**

|  |  |
| --- | --- |
| **A** | **¬A** |
| 0 | **1** |
| 1 | **0** |

**Übungsaufgaben**

1. Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für **(A ˄ B) ˅ B**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **B** | **A ˄ B**  **= C** | **C ˅ B** |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | **0** | **1** | **1** |
| 0 | 1 | **0** | **0** | **0** |
| 0 | 0 | **1** | **0** | **1** |

1. Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für **(A ˄ B)**.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **(A ˄ B)** | **(A ˄ B)** |
| 1 | 0 | **0** | **1** |
| 1 | 1 | **1** | **0** |
| 0 | 1 | **0** | **1** |
| 0 | 0 | **0** | **1** |

1. Erstellen Sie eine Wahrheitstabelle für **A ˅ B**.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **A** | **B** | **A** | **B** | **A ˅ B)** |
| 1 | 0 | **0** | **1** | **1** |
| 1 | 1 | **0** | **0** | **0** |
| 0 | 1 | **1** | **0** | **1** |
| 0 | 0 | **1** | **1** | **1** |

1. Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Konjunktion für folgende drei Aussagen an:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **(A ˄ B)** |
| I | **1** | **1** | **1** |
| II | **1** | **1** | **1** |
| III | **1** | **0** | **0** |

1. Geben Sie den Wahrheitsgehalt der Disjunktion für folgende drei Aussagen an:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | **A** | **B** | **(A ˅ B)** |
| I | **1** | **1** | **1** |
| II | **0/1** | **1** | **1** |
| III | **1** | **0** | **1** |

**Axiome nach Peano**

Vergleichen Sie die Ergebnisse der Übungsaufgabe (2) und (3) mit dem „De Morganschen Gesetz“.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Kommutativgesetz | A ˄ B = B ˄ A | A ˅ B = B ˅ A |
| Assoziativgesetz | (A ˄ B) ˄ C = A ˄ (B ˄ C) | (A ˅ B) ˅ C = A ˅ (B ˅ C) |
| Idempotenzgesetz | A ˄ A = A | A ˅ A = A |
| Distributivgesetz | A ˄ (B ˅ C) = (A ˄ B) ˅ (A ˄ C) | A ˅ (B ˄ C) = (A ˅ B) ˄ (A ˅ C) |
| De Morgansche Gesetz | (A ˄ B) = A ˅ B | (A ˅ B) = A ˄ B |