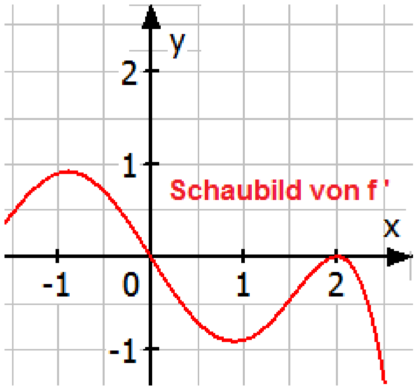
Übungsaufgaben Funktionskompetenz - Lösungen
(Aufgabe 5, Pflichtteil schriftliches Abitur, BW)

1.) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f' einer Funktion f.
Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind.



a) An der Stelle 0 hat das Schaubild von f einen Hochpunkt.
b) Für $0 \le x \le 2$ ist $f(x) \le 0$.
c) Das Schaubild von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung für -1<x<1.
d) An der Stelle 2 hat das Schaubild von f einen Wendepunkt.

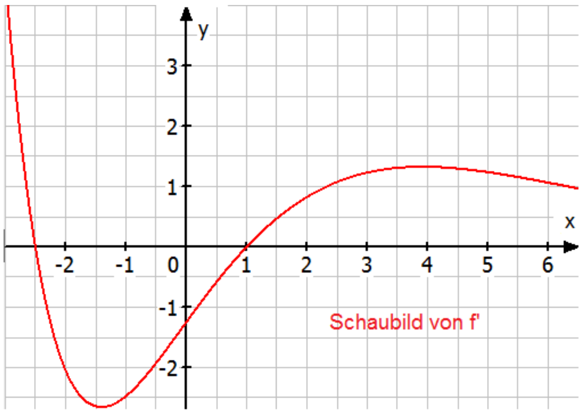
Zu a): Die Aussage ist **wahr**.
f ′ hat an der Stelle 0 eine Nullstelle (waagrechte Steigung) und einen VZW von + nach –.

Zu b): Die Aussage ist **unentscheidbar**.
Aus dem Verlauf von f‘ lässt sich nicht eindeutig der Verlauf von f rekonstruieren.

Zu c): Die Aussage ist **falsch**.
Das Schaubild von f ist achsensymmetrisch für -1<x<1, da f ′ in diesem Bereich punktsymmetrisch ist.

Zu d): Die Aussage ist **wahr**.
f ′(2) = 0 und f ′ hat keinen VZW bei 2. Somit liegt an der Stelle 2 ein Sattelpunkt vor.

2.) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f ′ einer Funktion f.



a) Begründen Sie, welche Aussagen man in dem dargestellten Bereich hinsichtlich der Anzahl der
   - Extremstellen,
   - Wendestellen,
   und Nullstellen
   von f man machen kann

b) Begründen Sie, dass $\int_{-2}^{3} f\,'(x)\,dx < 0$ gilt.

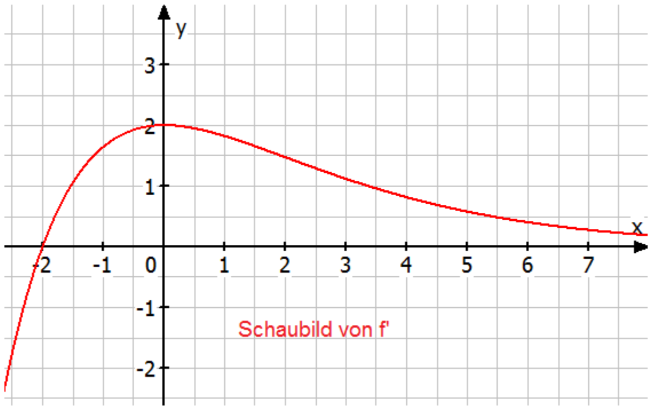
Zu a) f hat **zwei Extremstellen**, da f ′ zwei Nullstellen mit VZW besitzt.
f hat **zwei Wendestellen**, da f ′ zwei Extremstellen besitzt.
Das Schaubild von f ′ gibt nur die Steigung von f an. Mögliche Schaubilder von f unterscheiden sich alle durch eine Verschiebung parallel zur y-Achse. Somit lässt sich aus f ′ **keine Aussage** über Nullstellen von f ziehen.

Zu b) Die unterhalb der x-Achse liegende Fläche zwischen dem Schaubild von f und der x-Achse über dem Intervall [-2,1] hat einen deutlich größeren Flächeninhalt als die über der x-Achse liegende Fläche über dem Intervall [1, 3]. Da die unterhalb liegende Fläche ein negatives Integral besitzt, ist die Ungleichung richtig.

3.) Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitung f ′ einer Funktion f.

Begründen Sie, ob folgende Aussagen über die Funktion f wahr, falsch oder unentscheidbar sind.

a) Bei x = 0 besitzt das Schaubild von f einen Extrempunkt.
b) Bei x = -2 besitzt das Schaubild von f eine waagrechte Tangente.
c) Das Schaubild der Funktion f besitzt keine Wendepunkte.
d) f(x) > 0 für x > -2.



Zu a): Die Aussage ist **falsch**: da f′ (0) = 2 bedeutet, dass die Funktion f an der Stelle eine positive Steigung besitzt.

Zu b): Die Aussage ist **wahr**: da f′(-2) = 0 bedeutet, dass f an der Stelle -1 eine waagrechte Tangente besitzt.

Zu c): Die Aussage ist **falsch**: Wendepunkte von f sind Extrempunkte von f′.
Da f′ an der Stelle 0 einen Tiefpunkt besitzt, hat f an der Stelle 0 einen Wendepunkt.

Zu d): Die Aussage ist unentscheidbar: Das Schaubild von f‘ gibt nur die Steigung von f an. Mögliche Schaubilder von f unterscheiden sich alle durch eine Verschiebung parallel zur y-Achse. Somit lässt sich aus f‘ keine Aussage über Funktionswerte von f ziehen.

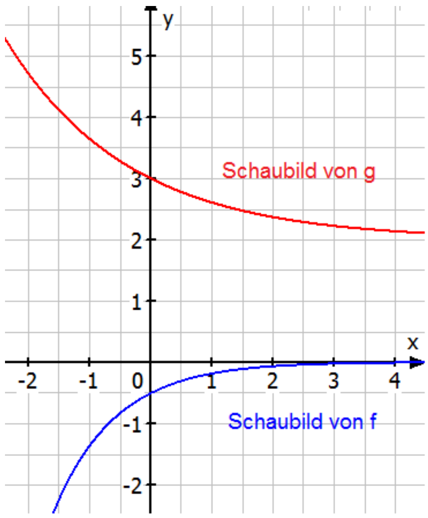
4.) Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g. Eine der beiden Funktionen ist die Ableitungsfunktion der anderen Funktion.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.

b) Die Funktion g hat die Funktionsgleichung

$g(x) = e^{ax} + b$.

Bestimmen Sie a und b.



Zu a): Die Steigung von f ist für x > 0 kleiner als 1.
Da g(x) > 2 für x > 0 scheidet g als Ableitung von f aus.
Somit gilt g‘(x) = f(x).

Zu b): Aus g(0) = 3 folgt 3 = 1 + b und **b = 2.**

$g(x) = e^{ax} + 2$ $\quad g'(x) = a \cdot e^{ax} = f(x)$ $\quad$ Aus $f(0) = \frac{1}{2}$ folgt $\mathbf{a = \frac{1}{2}}$ $\quad$ $\mathbf{g(x) = e^{0,5x} + 2}$

5.) Die 4 Abbildungen zeigen die Schaubilder von Funktionen.

Eines dieser Schaubilder gehört zu der Funktion f mit $f(x) = \frac{a}{1+x^2} - 1$.

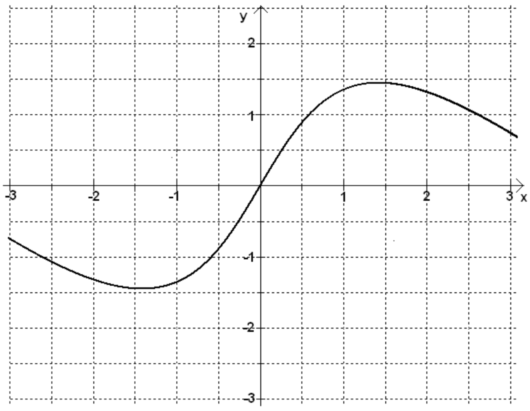


Abbildung 1

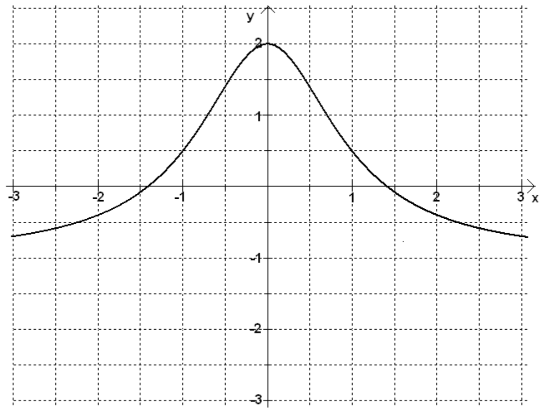


Abbildung 2

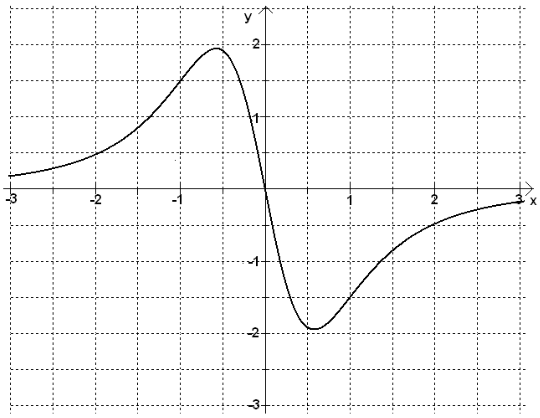


Abbildung 3

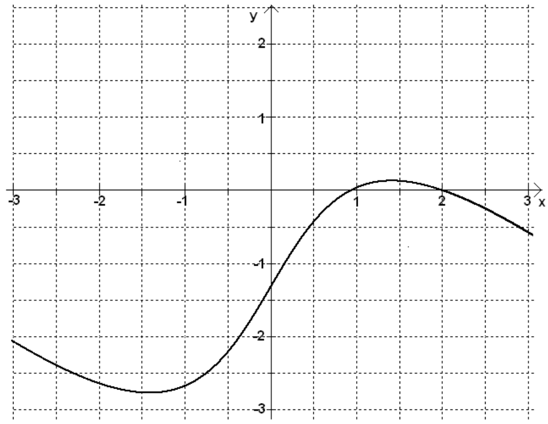


Abbildung 4

a) Begründen Sie, dass Abbildung 2 zur Funktion f gehört.
   Bestimmen Sie den Wert von a.
b) Von den anderen drei Abbildungen gehört eine zur Ableitungsfunktion f '
   und eine zur Integralfunktion I mit $I(x) = \int_2^x f(t)dt$.
   Ordnen Sie diesen beiden Funktionen die zugehörigen Abbildungen zu und begründen Sie jeweils Ihre Zuordnung.

Zu a): Die Funktion f hat eine **waagrechte Asymptote** mit y = -1. Somit bleibt nur Abbildung 2 als Schaubild von f.
Der Ansatz f(0) = 2 ergibt 2 =$\frac{a}{1+0} - 1 \Rightarrow$ **a = 3.**

Zu b): Das Schaubild von f hat einen Hochpunkt an der Stelle x = 0. Deshalb muss die Ableitungsfunktion f' an dieser Stelle einen VZW von plus nach minus haben.
Dies trifft **nur auf Abbildung 3** zu.
Aus $I(x) = \int_2^x f(t)dt$ folgt $I(2) = \int_2^2 f(t)dt = 0.$

Nur Abbildung 4 hat an der Stelle x = 2 eine Nullstelle. Demnach gehört **Abbildung 4** zum Schaubild der Integralfunktion von f.