Übungsaufgaben Gleichungslehre - Lösungen
(Aufgabe 3, Pflichtteil schriftliches Abitur, BW)

1.) Lösen Sie die Gleichung $x^5 + 2x^3 - 3x = 0$.

Satz vom Nullprodukt: $x\cdot(x^4 + 2x^2 - 3 = 0) \Leftrightarrow x = 0$ oder $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$.

Substitution $x^2 = z$: $z^2 + 2z - 3 = 0 \Rightarrow$ Satz von Vieta (oder Lösungsformel): $z_1 = 1$, $z_2 = -3$

Rücksubstitution: $x^2 = 1$ oder $x^2 = -3$ ergibt
$x = 1$ oder $x = -1$

Es gibt also drei Lösungen: **$x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.**

2.) Lösen Sie die Gleichung $(2x^2 - 50)\cdot(e^{2x} - 7) = 0$.

Satz vom Nullprodukt: $(2x^2 - 50)\cdot(e^{2x} - 7) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 50 = 0$ oder $(e^{2x} - 7) = 0$

$\Leftrightarrow x = -5$ oder $x = 5$ oder $x = \frac{1}{2}\ln 7$

Es gibt also drei Lösungen: x_1 **$= -5$, $x_2 = 5$, $x_3 = \frac{1}{2}\ln 7$.**

3.) Lösen Sie die Gleichung $e^x + 3 - 10\cdot e^{-x} = 0$.

$e^x + 3 - 10\cdot e^{-x} = 0 \mid \cdot e^x \quad \Leftrightarrow e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$

Substitution $e^x = z$: $z^2 + 3z - 10 = 0 \Rightarrow$ Satz von Vieta (oder Lösungsformel): $z_1 = -5$, $z_2 = 2$

Rücksubstitution: $e^x = -5$ oder $e^x = 2$
(Keine Lösung), $x = \ln 2$

Es gibt also eine Lösung: **$x = \ln 2$.**

4.) Lösen Sie die Gleichung $(e^{-x} - 3)^2 = 4$.

$(e^{-x} - 3)^2 = 4 \Leftrightarrow e^{-x} - 3 = 2$ oder $e^{-x} - 3 = -2 \quad \Leftrightarrow$ **$x = -\ln 5$ oder $x = 0$**

Es gibt also zwei Lösungen: **$x_1 = -\ln 5$, $x_2 = 0$**.

5.) Lösen Sie für $0 \le x \le 2\pi$ die Gleichung $(\sin(x))^2 - 2\sin(x) = 3$.

Substitution $z = \sin(x)$: $z^2 - 2z - 3 = 0$.
Lösungen mit Vieta (oder Lösungsformel) : $z_1 = -1$ oder $z_2 = 3$

Resubstitution: $\sin(x) = -1$ oder $\sin(x) = 3$ (keine Lösung) $\Rightarrow x = \frac{3}{2}\pi$
Es gibt also eine Lösung: **$x = \frac{3}{2}\pi$.**

6.) Lösen Sie die Gleichung $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 1$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner: $\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = 1 | \cdot x^2 \Leftrightarrow 2 + x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Satz von Vieta (oder Lösungsformel): $x = -1$ oder $x = 2$

Es gibt also zwei Lösungen: **$x_1 = -1$, $x_2 = 2$.**

7.) Lösen Sie die Gleichung $1 - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{2x}} = 0$.

Multiplikation mit dem Hauptnenner: $1 - \frac{5}{e^x} + \frac{4}{e^{2x}} = 0 | \cdot e^{2x} \Leftrightarrow: e^{2x} - 5e^x + 4 = 0$.

Substitution $e^x = z$: $z^2 - 5z + 4 = 0$ $\Rightarrow$ Satz von Vieta (oder Lösungsformel): $z_1 = 1$, $z_2 = 4$

Rücksubstitution: $e^x = -1$ oder $e^x = 1$ oder $e^x = -4$ oder $e^x = 4$ ergibt
die Lösungen $x = 0$ oder $x = \ln(4)$

Es gibt also zwei Lösungen: **$x_1 = 0$, $x_2 = \ln(4)$.**

8.) Lösen Sie für $0 \le x \le 2\pi$ die Gleichung $\cos(x)\cdot(e^{-2x+1} + 1) = 0$.

Satz vom Nullprodukt: $\cos(x)\cdot(e^{-2x+1} + 1) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0$ oder $e^{-2x+1} + 1 = 0$
$\cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\pi$ oder $x = \frac{3}{2}\pi$
$e^{-2x+1} + 1 = 0 \Leftrightarrow e^{-2x+1} = 1$ (keine Lösung)
Es gibt also zwei Lösungen: **$x_1 = \frac{1}{2}\pi$, $x_2 = \frac{3}{2}\pi$.**