Übungsaufgaben Integration - Lösungen
(Aufgabe 2, Pflichtteil schriftliches Abitur, BW)

1.) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3e^{-2x} + \frac{1}{2x}$.
Bestimmen Sie eine Stammfunktion F von f.

$\mathbf{F(x) = -\frac{3}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}\ln|x|}$

2.) Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$.

Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f , deren Schaubild den Punkt (1|0) enthält.

Umschreiben von f: $f(x) = \frac{1}{x^2} + x = x^{-2} + x$.

$F_c(x) = -x^{-1} + \frac{1}{2}x^2 + c = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}x^2 + c$ $F_c(1) = 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{2} + c = 0 \Rightarrow$ $\mathbf{c = \frac{1}{2}}$

3.) Zeigen Sie, dass $F(x) = \ln(1+x^2)$ eine Stammfunktion von $f(x) = 2\cdot\frac{x}{1+x^2}$ ist.

Zu zeigen ist, dass F(x)' = f(x) :

$F(x) = (\ln(1+x^2))' = \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x = \mathbf{2\cdot\frac{x}{1+x^2}}$ (Anwendung der Kettenregel))

4.) Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx$.

$\int_1^e \left(\frac{3}{x} - 1\right) dx = [3\ln|x| - x]_1^e$ = 3lne – e – (3ln1 – 1) = 3 - e + 1 = **4 – e**

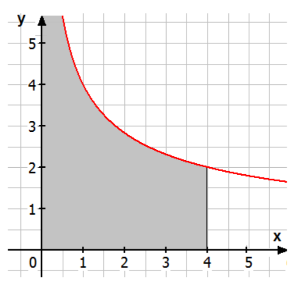
5.) Berechnen Sie das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x) + 1)\, dx$.

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sin(2x) + 1)\, dx = \left[\left(-\frac{1}{2}\cos(2x)\right) + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{1}{2}\cos(2\cdot\frac{\pi}{4})\right) + \frac{\pi}{4} - \left(\left(-\frac{1}{2}\cos(2\cdot 0\right) + 0\right)$

$= 0 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \mathbf{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}}$.

6.) Die Funktion f mit $f(x) = \frac{4}{\sqrt{x}}$ schließt mit der x-Achse, der Geraden x = 4 und der y-Achse eine nach oben offene Fläche ein (siehe Skizze).

Untersuchen Sie, ob diese Fläche einen endlichen Flächeninhalt hat und bestimmen Sie diesen gegebenenfalls.



$A_k = \int_k^4 \frac{4}{\sqrt{x}} dx = \int_k^4 4 \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx = \left[8 \cdot x^{\frac{1}{2}}\right]_k^4 = 16 - 8 \cdot \sqrt{k}$

$16 - 8 \cdot \sqrt{k} \to 16$ für $k \to 0$, die Fläche hat also den **endlichen Flächeninhalt 16.**