Übungsaufgabe Analysis A1 - Lösungen
(Wahlteil schriftliches Abitur, BW)

Aufgabe A1.1

Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k festgelegt durch

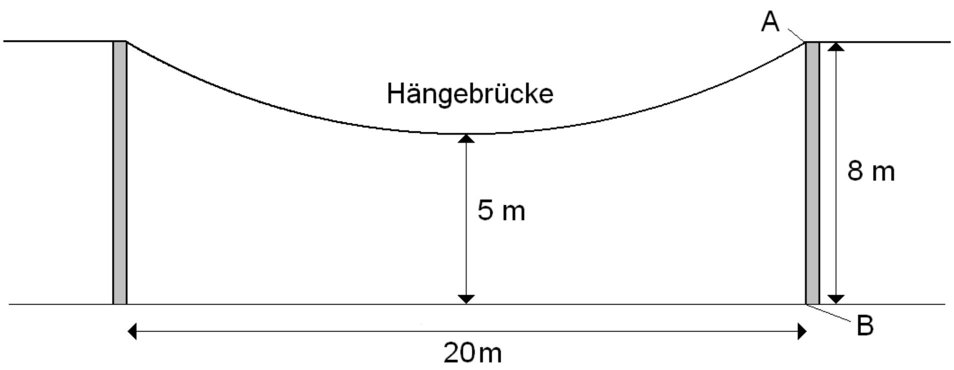
$$f_k(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} \; ; \; x \in \mathbf{R}.$$

Ihr Schaubild sei C_k.

a) Skizzieren Sie für $k = 0{,}5$, $k = 1$ und $k = 2$ die Schaubilder C_k in ein gemeinsames Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass C_1 achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
Bestimmen Sie den Tiefpunkt von C_1.

b) Das Schaubild C_k schließt mit der x-Achse und den Geraden $x = 0$ und $x = 1/k$ eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Eine Hängebrücke in einem Klettergarten wird durch die untere Skizze dargestellt.



c) Das Profil der Brücke soll durch das Schaubild der Funktion $g(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$ (x und y in m) beschrieben werden. Bestimmen Sie a und k.

d) Bestimmen Sie unter welchem Winkel die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft.

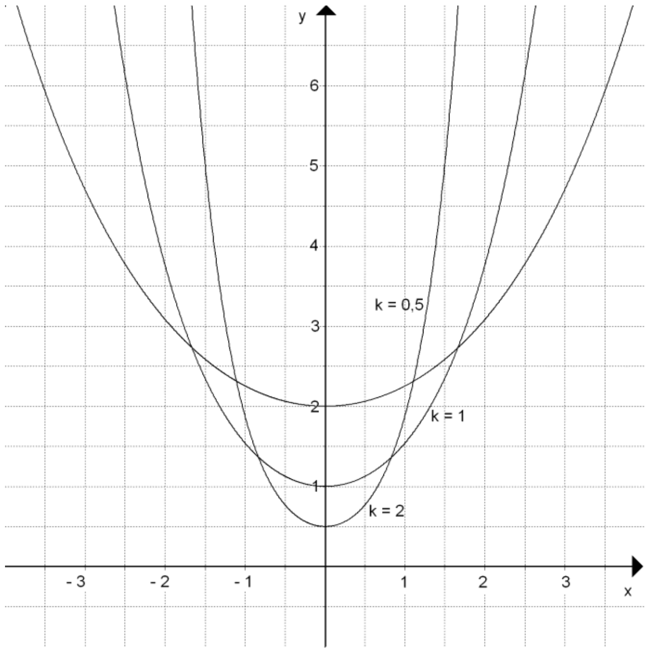
e) Zur Stabilisierung der Brücke wird im Punkt B ein Halteseil am Boden befestigt und senkrecht im Punkt P an die Brücke angebracht.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Befestigungspunkts P.

Aufgabe A1.2

Ein Kegel mit dem Radius r und der Höhe h entsteht, indem das Schaubild einer Funktion k um die x-Achse rotiert.
Bestimmen sie die Funktionsgleichung von k.
Berechnen Sie das Volumen V des Kegels mit Hilfe eines geeigneten Integrals und weisen Sie so die Richtigkeit der Formel $V = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$ nach.

Lösung Aufgabe A1.1:

a) Schaubild für k = 0,5, k = 1 und k = 2



Symmetrie von C_1

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = f_1(-x) .$$

C_1 ist daher **achsensymmetrisch zur y-Achse.**

Tiefpunkt von C_1

$f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Aus $f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$

folgt x = 0. Wegen f(0) = $\frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 1$

lautet der **Tiefpunkt T(0|1).**
(laut Aufgabenstellung kann auf die hinreichende Bedingung verzichtet werden)

b) Flächeninhalt A_k von C_k über dem Intervall [0; $\frac{1}{k}$]

$$A_k = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k} \, dx = \frac{1}{2k} \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} (e^{kx} + e^{-kx}) \, dx = \frac{1}{2k} \cdot \left[\frac{1}{k} e^{kx} - \frac{1}{k} e^{-kx} \right]_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2k^2} \cdot \left[e^{kx} - e^{-kx} \right]_0^{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{2k^2} \cdot (e - e^{-1}) .$$

Der gesuchte Flächeninhalt hat den Wert $\mathbf{\frac{1}{2k^2} \cdot (e - \frac{1}{e})}$**.**

c) <u>Geeignete Wahl des Koordinatensystems</u>

Erdboden: x-Achse, Symmetrieachse der Brücke: y-Achse.

<u>Bestimmung von a und k</u>

f(0) = 5 ergibt $5 = a \cdot \frac{e^0 + e^0}{2k}$ und damit $5k = a$ (1).

Aus f(10) = 8 und (1) ergibt sich $3{,}2 = e^{10k} + e^{-10k}$ (2).

(2) lässt sich mit Hilfe der Solverfunktion des GTR (oder mit der Substitution $e^{10k} = u$)
lösen und man erhält: k ≈ 0,105 und mit (1) a ≈ 0,525.

Die gesuchte Funktion lautet $\mathbf{g(x) \approx 2{,}5\,(e^{0{,}105x} + e^{-0{,}105x})}$.

d) Zu bestimmen ist der Steigungswinkel des Schaubildes von g(x) an der Stelle 10:

<u>Bestimmung der Steigung</u>

$g'(x) = 2{,}5 \cdot 0{,}105\,(e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})$ und somit g'(10) ≈ 0,658.

<u>Bestimmung des Steigungswinkels</u>

Aus der Beziehung tan(α) = g'(10) folgt α ≈ 33°.

Die Brücke trifft ungefähr unter dem **Steigungswinkel 33°** auf die Plattform.

e) Zu bestimmen ist die Normale vom Punkt B(10|0) an das Schaubild von g(x):

<u>Normalengleichung</u>

$$-\frac{1}{g'(x)} = \frac{g(x) - 0}{x - 10} \quad \text{oder} \quad -\frac{1}{0{,}2625(e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})} = \frac{2{,}5\,(e^{0{,}105x} + e^{-0{,}105x})}{x - 10}.$$

<u>Bestimmung des Brückenpunktes P</u>

Formt man die obere Gleichung um, so ergibt sich

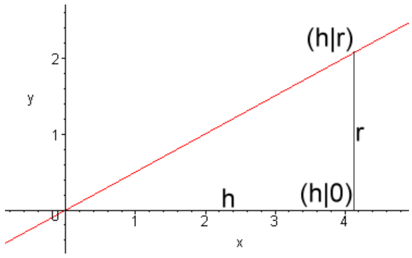
$$10 - x = 0{,}65625 \cdot (e^{0{,}21x} - e^{-0{,}21x}).$$

Mit der Solverfunktion des GTR erhält man als Lösung x ≈ 7,18 und
den zugehörigen Funktionswert g(7,18) ≈ 6,49.

Der gesuchte **Brückenpunkt P** hat ungefähr die **Koordinaten P(7,18|6,49).**

Lösung Aufgabe A1.2:

Skizze:



Die Ursprungsgerade hat die Steigung $m = \frac{r}{h}$ und somit $k(x) = \frac{r}{h} \cdot x$

$$V = \pi \cdot \int_0^h \left(\frac{r}{h} \cdot x\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^h \frac{r^2}{h^2} \cdot x^2\, dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2} \cdot x^3\right]_0^h = \pi \cdot \frac{1}{3}\frac{r^2}{h^2} \cdot h^3 = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h.$$