Übungsaufgabe Analytische Geometrie B1 - Lösungen
(Wahlteil schriftliches Abitur, BW)

Aufgabe B1
Ein rechteckiger Spiegel hat die Eckpunkte A(2|0|0), B(-2|4|0), C(-2|4|4) und D(2|0|4). Er lässt sich um die Strecke PQ durch die Punkte P(0|2|0) und Q(0|2|4) drehen.
Weiterhin ist für jedes $t \in \mathbf{R}$ eine Ebene E_t durch die Gleichung $E_t : x_1 + tx_2 = 2t$ gegeben. Für jedes t wird durch die Ebene E_t eine mögliche Lage des Spiegels dargestellt.

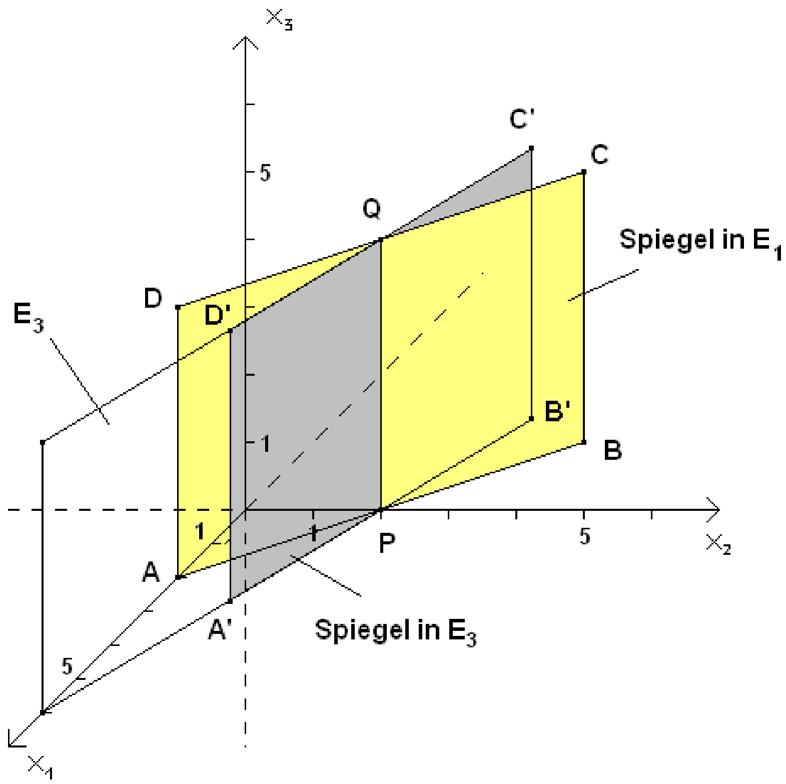
a) Zeichnen Sie den Spiegel und die Strecke PQ in ein Koordinatensystem.
Zeigen Sie, dass der Spiegel in der Ebene E_1 liegt.
Zeichnen Sie die Ebene E_3 ein.
Der Spiegel dreht sich nun so, dass er in der Ebene E_3 liegt. Berechnen Sie, um wie viel Grad er sich dabei gedreht hat.
Beschreiben Sie, wie sich die Stellung des Spiegels in Abhängigkeit von t ändert.
Bestimmen Sie, welche Stellung des Spiegels durch keine Ebene E_t dargestellt wird.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Spiegels, wenn der Spiegel in der Ebene E_3 liegt und zeichnen Sie den Spiegel für diese Lage ein.

c) Im Punkt L(6|8|1) befindet sich eine Lichtquelle, welche einen Lichtstrahl in Richtung $\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ aussendet.
Zeigen Sie, dass der Lichtstrahl den Spiegel unabhängig von dessen Stellung immer im gleichen Punkt trifft.

Lösungen Aufgabe B1:

a) und b) Darstellung im Koordinatensystem:



<u>Spiegel liegt in E_1</u>
Die Ebene $E_1 : x_1 + x_2 = 2$ hat die Spurpunkte $S_1(2|0|0) = A$ und $S_2\ (0|2|0) = P$ und keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Sie liegt also parallel zur x_3-Achse.
Da $-2 + 4 = 2$, folgt $B \in E_1$. Aus $C, D \in E_1$ folgt, dass der Spiegel in der Ebene E_1 liegt.

<u>Zeichnung von E_3</u>
Die Ebene $E_3 : x_1 + 3x_2 = 6$ hat die Spurpunkte $S_1(6|0|0)$ und $S_2\ (0|2|0) = P$ und keinen Schnittpunkt mit der x_3-Achse. Sie liegt somit ebenfalls parallel zur x_3-Achse.

<u>Drehwinkel zwischen den Ebenen E_1 und E_3</u>
Ein möglicher Drehwinkel entspricht dem Winkel γ zwischen den Ebenen E_1 und E_3.

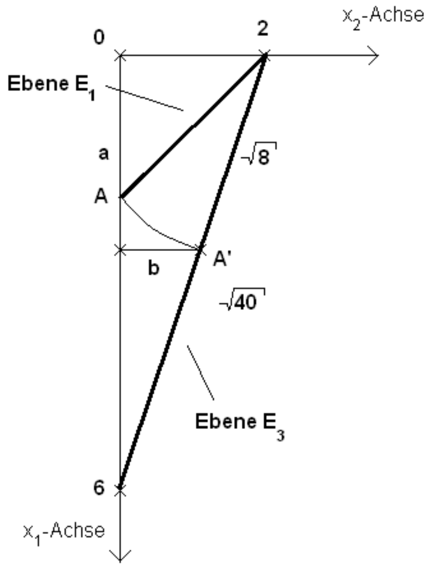
$$\cos\gamma = \frac{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}\right|} = \frac{4}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} \approx 0{,}8944 \text{ und somit } \boldsymbol{\gamma \approx 26{,}57°.}$$

Lage in Abhängigkeit von t

Die Ebene E_t hat die Spurpunkte $S_1(2t|0|0)$ und $S_2(0|2|0)$, S_3 existiert nicht.
Daraus folgt, dass alle Ebenen parallel zur x_3-Achse liegen. Für t = 0 liegt der Spiegel in der x_2x_3-Ebene. Je größer |t| wird, desto mehr dreht sich die Ebene und somit der Spiegel parallel zur x_1x_3-Ebene. Diese parallele Stellung des Spiegels wird aber für kein t dargestellt, der Spiegel liegt dann in der Ebene $x_2 = 2$.

b) Berechnung der Koordinaten der neuen Eckpunkte des Spiegels

Der Spiegel ist 4 Einheiten hoch und $2\sqrt{8}$ Einheiten breit.



Die Koordinaten des neuen Eckpunktes A'(a|b|0) lassen sich gemäß der nebenstehenden Skizze durch Strahlensätze berechnen.
Es gilt

$\frac{b}{2} = \frac{\sqrt{40}-\sqrt{8}}{\sqrt{40}}$ und somit $b = 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5} \approx 1{,}11$

und $\frac{a}{\sqrt{8}} = \frac{6}{\sqrt{40}}$ und somit $a = \frac{6}{5}\sqrt{5} \approx 2{,}68$.

Der neue Eckpunkt hat somit ungefähr die Koordinaten **A'(2,68|1,11|0).**

Die ungefähren Koordinaten der anderen Eckpunkte ergeben sich durch Symmetrieüberlegungen:
B'(-2,68|2,89|0) , C'(-2,68|2,89|4) und D'(2,68|1,11|4)

Zeichnung der neuen Lage

siehe Skizze Teil a)

c) Schnittpunkt Lichtstrahl und Spiegel

Der Lichtstrahl wird durch die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, s \in \mathbf{R}$ beschrieben.

$g \cap E_t$ ergibt $6 - 3s + t\cdot(8 - 3s) = 2t$. Lösung hiervon ist $s = \frac{6t+6}{3t+3} = 2,\ t \neq -1$. Für t = -1 liegt die Gerade g in der Ebene E_t. Der Schnittpunkt ist somit **unabhängig von t**.
Einsetzen von s = 2 in g ergibt für den **Schnittpunkt S die Koordinaten (0|2|3).** Dieser liegt auf der Drehachse PQ des Spiegels.