Übungsaufgabe Stochastik C1
(Wahlteil schriftliches Abitur, BW)

Aufgabe C1
Der Body-Mass-Index ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.
Menschen mit einem BMI > 25 gelten laut diesem Index bereits als übergewichtig.

a) Laut statistischem Bundesamt waren im Jahr 2017 60% der männlichen Bevölkerung übergewichtig (BMI >25).
Berechnen Sie, die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind genau 6 Männer übergewichtig.“
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind mehr als die Hälfte übergewichtig.“
C: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind nur die ersten drei nicht übergewichtig.“

b) Wie hoch müsste der Anteil der Übergewichtigen in der weiblichen Bevölkerung mindestens sein, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% unter 100 zufällig ausgewählten Frauen mindestens 50 Übergewichtige sind.

c) In der Gesamtbevölkerung Deutschlands betrug der Anteil der Übergewichtigen im Jahr 2017 laut statistischem Bundesamt 54 %.
Ein Dorf hat 500 Einwohner. Bestimmen Sie ein Intervall, in dem die Anzahl der Übergewichtigen in dem Dorf mit 95%-iger Sicherheit liegen wird.

Ein Sportverein in dem Dorf hat 90 Mitglieder. Der Vereinsvorsitzende behauptet, dass der Anteil der Übergewichtigen in seinem Verein geringer als in der sonstigen Bevölkerung ist.
Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \geq 0,54$ auf dem Signifikanzniveau 10% getestet und das BMI der 90 Mitglieder ermittelt.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung Aufgabe C1:

a) Die Zufallsvariable X_1 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter 10 beliebigen Männer. X_1 ist $B_{10;0,6}$ - verteilt.

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

$P(A) = P(X_1 = 6) = \mathbf{0{,}25}$ (GTR)

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:

$P(B) = P(X_1 \geq 6) = 1 - P(X_1 \leq 5) = \mathbf{0{,}63}$ (GTR)

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C:

$P(C) = 0{,}4^3 \cdot 0{,}6^7 = \mathbf{0{,}0018}$

b) Die Zufallsvariable X_2 beschreibt die Anzahl der Übergewichtigen unter 100 Frauen.
X_2 ist $B_{100;\,p}$ – verteilt mit unbekanntem p.
Zu bestimmen ist die kleinste Zahl p mit $P(X_2 \geq 50) \geq 0{,}95 \Leftrightarrow 1 - P(X_2 \leq 49) \geq 0{,}95$.

Der GTR liefert p ≈ 0,577. Der Anteil müsste 57,7 % betragen.

c) Die Zufallsvariable X_3 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter 500 Personen.
X_3 ist $B_{500;0,54}$ - verteilt.

Mittelwert $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}54 = 270$.
Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \approx 11{,}14$

$P(\mu - 1{,}96 \cdot \sigma \leq X \leq \mu + 1{,}96 \cdot \sigma) \approx 0{,}95$ (oder Tabellenfunktion GTR)
$P(270 - 1{,}96 \cdot 11{,}14 \leq X \leq 270 + 1{,}96 \cdot 11{,}14) \approx 0{,}95$
$P(248{,}16 \leq X \leq 291{,}83) \approx 0{,}95$

In dem Dorf wird mit 95%-Sicherheit die Anzahl der Übergewichtigen zwischen 248 und 292 Personen liegen.

Die Zufallsvariable X_4 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen im Verein.
Gilt die Nullhypothese P_0: $p \geq 0{,}54$, so ist Z im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern n = 90 und p = 0,54. Es handelt sich um einen linksseitigen Test.
Gesucht ist die kleinste natürlich Zahl g mit $P(X_4 \leq g) \geq 0{,}1$.
$P(X_4 \leq 42) = 0{,}098$ und $P(X_4 \leq 43) = 0{,}140$ (GTR).

Entscheidungsregel:
Sind in dem Sportverein maximal 42 mit einem BMI über 25, so wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.