Übungsaufgaben Beschreiben-Verstehen-Begründen - Lösungen
(Aufgabe 9, Pflichtteil schriftliches Abitur, BW)

1.) Gegeben sind zwei zueinander parallele Ebenen E_1 und E_2. Die Ebene F ist parallel zu E_1 und E_2 und hat von beiden Ebenen den gleichen Abstand.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

- Man wählt beliebige Punkte P_1 auf E_1 und P_2 auf E_2
- Man bestimmt den Mittelpunkt M der Strecke P_1P_2.
- Mit einem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebenen E_1 und E_2 erhält man die Normalengleichung für die gesuchte Ebene $F: (\vec{x} - \overrightarrow{OM}) \cdot \vec{n} = 0$.

2.) Gegeben ist eine Ebene E. Gesucht ist eine zu E parallele Ebene F im Abstand 3.
Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man eine Gleichung der Ebene F bestimmen kann.

- Gegeben sei die Ebene E: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$.

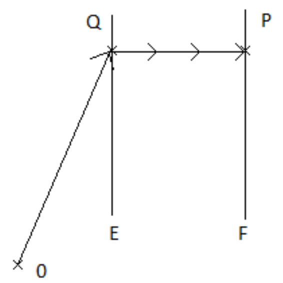
- Die Ebenen E und F haben den gleichen Normalenvektor, also $\vec{n_F} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

- Man bestimmt einen Punkt P auf der Ebene F durch

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + 3 \cdot \vec{n_0}$$

wobei Q ein beliebiger Punkt der Ebene E ist. (siehe Skizze)

- F hat dann die Gleichung $F: (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_E} = 0$.



3.) Die vier Punkte A, B, C und D bilden ein Parallelogramm im Raum. Des Weiteren ist ein Punkt P gegeben.
Beschreiben Sie ein Verfahren, um festzustellen ob der Punkt P im Parallelogramm ABCD liegt.

- Zunächst bestimmt man die Parameterform der Ebene, in der das Parallelogramm ABCD liegt. Diese lautet $E: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$ mit $r, s \in \mathbb{R}$.
- Nun erfolgt eine Punktprobe mit P. Hat die Gleichung $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$ keine Lösung, so liegt P nicht in der Ebene E und somit auch nicht im Parallelogramm ABCD.
- Hat die Gleichung $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AD}$ eine Lösung für r und s, so liegt der Punkt P genau dann im Parallelogramm, wenn $0 \leq r, s \leq 1$.

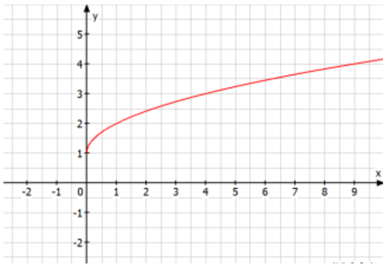
4.) a) Skizzieren Sie das Schaubild einer Funktion f mit folgenden Eigenschaften:

$$f(x) > 0,\ f'(x) > 0 \text{ und } f''(x) < 0$$

b) Begründen Sie: Ist $f''(x) < 0$, so ist das Schaubild von f eine Rechtskurve.

Zu a): $f(x) > 0$ (Funktionswerte oberhalb der x-Achse)
$f'(x) > 0$ (Steigung positiv)
$f''(x) < 0$ (rechtsgekrümmt)

Ein mögliches Schaubild mit den drei Eigenschaften ist rechts skizziert.



Zu b) $f''(x) < 0 \Leftrightarrow (f'(x))' < 0 \Leftrightarrow f'$ ist streng monoton fallend.
$\Rightarrow$ Das Schaubild einer Funktion, deren Steigung durchwegs abnimmt ist rechtsgekrümmt.

5.) Für ein Ereignis A bei der mehrmaligen Durchführung eines Bernoulli-Experimentes gilt

$$P(A) = 1 - \left(\binom{15}{13} \cdot 0{,}6^{13} \cdot 0{,}4^{2} + \cdot\ 15 \cdot 0{,}6^{14} \cdot 0{,}4 + 0{,}6^{15}\right).$$

Beschreiben Sie das Ereignis A in Worten.

Das Bernoulli-Experiment hat die Trefferwahrscheinlichkeit p = 0,6 (1-p = 0,4) und wird n = 15 mal durchgeführt.
Ereignis A: ‚weniger als 13 Treffer bei 15 Wiederholungen'.