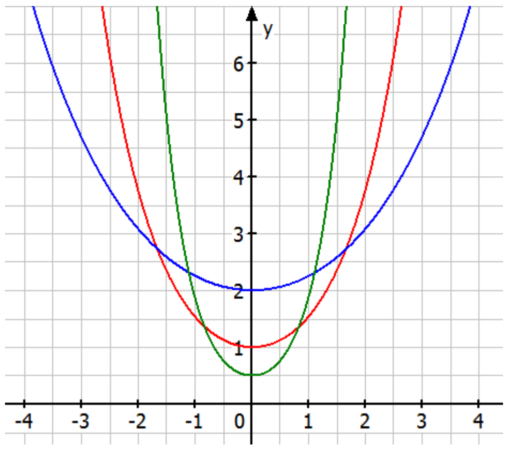
Übungsaufgabe Analysis A1 - Lösungen
(Wahlteil schriftliches Abitur 2019-2020, BW)

Aufgabe A1.1

Für jedes $k > 0$ ist eine Funktion f_k festgelegt durch

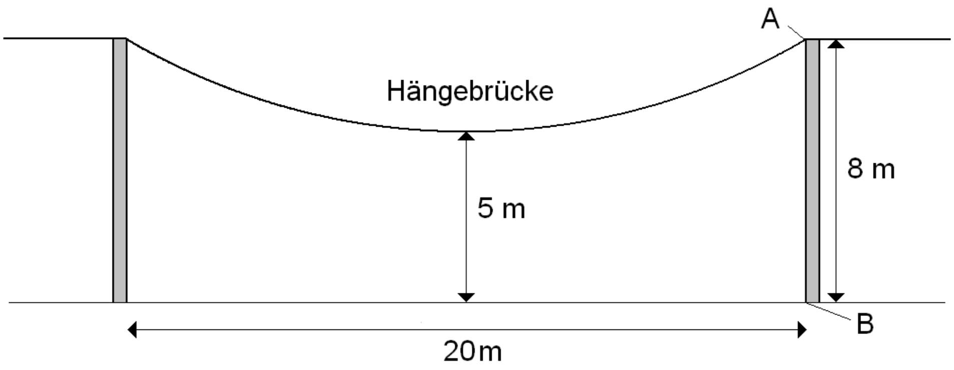
$$f_k(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}\ ;\ x \in \mathbf{R}.$$



a) Die Abbildung zeigt die Graphen für k = 0,5, k = 1 und k =2.
Bestimmen Sie zu jedem Graph den entsprechenden Wert für k.
Begründen Sie, dass der Graph von f_1 symmetrisch zur y-Achse ist.
Bestimmen Sie den Tiefpunkt des Graphen von f_1.

b) Der Graph von f_k schließt mit der x-Achse und den Geraden x = 0 und x = 1/k eine Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Eine Hängebrücke in einem Klettergarten wird durch die untere Skizze dargestellt.



c) Das Profil der Brücke soll durch den Graphen der Funktion $g(x) = a \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}$
(x und y in m) beschrieben werden. Bestimmen Sie a und k.

d) Berechnen Sie, unter welchem Winkel die Brücke im Punkt A auf die waagrechte Plattform trifft.

e) Zur Stabilisierung der Brücke wird im Punkt B ein Halteseil am Boden befestigt und senkrecht im Punkt P an die Brücke angebracht.
Begründen Sie, dass sich die x-Koordinate von P durch die Gleichung

$$-\frac{1}{0{,}2625(e^{0{,}105x}-\ e^{-0{,}105x})} = \frac{2{,}5\,(e^{0{,}105x}+\ e^{-0{,}105x})}{x-10}$$

bestimmen lässt.

Aufgabe A1.2

Gegeben sind die beiden Funktionenscharen f_a mit $f_a(x) = a^2 - x^2$ und g_a mit $g_a(x) = (a - x)^2$ mit a >0.

a) Skizzieren Sie die Graphen beider Funktionen für den Fall a = 1 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

b) Der Graph von f_a schließt mit der x-Achse eine Fläche mit Inhalt A_1 ein.
Die Graphen von f_a und g_a schließen eine Fläche mit Inhalt A_2 ein.
Zeigen Sie, dass unabhängig von a der Flächeninhalt A_2 ein Viertel des Flächeninhalts A_1 ist.

Lösung Aufgabe A1.1:

a) Zuordnung der Schaubilder

$f_k(0) = \frac{e^0+e^0}{2k} = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k}$ Aus dem Kehrwert des y-Achsenabschnittes folgt also der

entsprechende Wert für k $\Rightarrow$

grünes Schaubild: k = 2 (y-Achsenabschnitt 0,5)
rotes Schaubild: k = 1 (y-Achsenabschnitt 1)
blaues Schaubild: k = 0,5 (y-Achsenabschnitt 2)

Symmetrie des Graphen von f_1

$$f_1(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{e^{(-x)} + e^{-(-x)}}{2} = f_1(\text{-}x)\ .$$

Der Graph von f_1 ist daher **achsensymmetrisch zur y-Achse.**

Tiefpunkt des Graphen von f_1

$f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Aus $f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 0$ folgt x = 0. Wegen f(0) = $\frac{e^0 - e^{-0}}{2} = 1$ ist der **Tiefpunkt T(0|1).**

(laut Aufgabenstellung kann auf die hinreichende Bedingung verzichtet werden)

b) Flächeninhalt A_k von f_k über dem Intervall $[0; \frac{1}{k}]$

$$A_k = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2k}\, dx = \frac{1}{2k} \cdot \int_0^{\frac{1}{k}} (e^{kx} + e^{-kx})\, dx = \frac{1}{2k} \cdot \left[\frac{1}{k} e^{kx} - \frac{1}{k} e^{-kx}\right]_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2k^2} \cdot \left[e^{kx} - e^{-kx}\right]_0^{\frac{1}{k}}$$

$$= \frac{1}{2k^2} \cdot (e - e^{-1}).$$

Der gesuchte Flächeninhalt hat den Wert $\mathbf{\frac{1}{2k^2} \cdot (e - \frac{1}{e})}$.

c) Geeignete Wahl des Koordinatensystems

Erdboden: x-Achse, Symmetrieachse der Brücke: y-Achse.

Bestimmung von a und k

f(0) = 5 ergibt $5 = a \cdot \frac{e^0 + e^0}{2k}$ und damit $5k = a$ (1).

Aus f(10) = 8 und (1) ergibt sich $3{,}2 = e^{10k} + e^{-10k}$ (2).

(2) lässt sich mit der Substitution $e^{10k} = u$ lösen und man erhält:
k ≈ 0,105 und mit (1) a ≈ 0,525.

Die gesuchte Funktion lautet $\mathbf{g(x) \approx 2{,}5\,(e^{0{,}105x} + e^{-0{,}105x})}$.

d) Zu bestimmen ist der Steigungswinkel des Graphen von g(x) an der Stelle 10:

Bestimmung der Steigung

$g'(x) = 2{,}5 \cdot 0{,}105\,(e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})$ und somit g'(10) ≈ 0,658.

Bestimmung des Steigungswinkels

Aus der Beziehung tan(α) = g'(10) folgt α ≈ 33°.

Die Brücke trifft ungefähr unter dem **Steigungswinkel 33°** auf die Plattform.

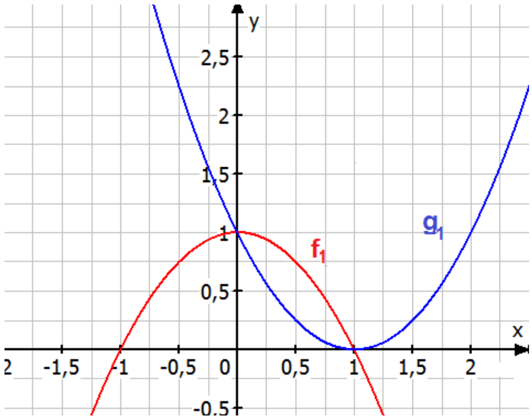
e) Zu bestimmen ist die Normale vom Punkt B(10|0) an das Schaubild von g(x):

Normalengleichung

$$-\frac{1}{g'(x)} = \frac{g(x)-0}{x-10} \text{ oder } -\frac{1}{0{,}2625(e^{0{,}105x} - e^{-0{,}105x})} = \frac{2{,}5\,(e^{0{,}105x} + e^{-0{,}105x})}{x-10}.$$

Lösung Aufgabe A1.2:

a) Skizze



b) Bestimmung der Schnittstellen von f_a und g_a:
$a^2 - x^2 = (a-x)^2 \Leftrightarrow a^2 - x^2 = a^2 - 2ax + x^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 2ax = 0 \Leftrightarrow 2x(x-a) = 0$

$\mathbf{x_1 = 0}$ **und** $\mathbf{x_2 = a}$

Bestimmung von A_1:

$$A_1 = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)dx = \left[a^2x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-a}^{a} = \boldsymbol{\tfrac{4}{3}a^3}$$

Bestimmung von A_2:

$$A_2 = \int_{0}^{a} (a^2 - x^2 - (a-x)^2)dx = \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2 - a^2 + 2ax - x^2)dx =$$

$$\int_{0}^{a} (-2x^2 + 2ax)dx = \left[-\tfrac{2}{3}x^3 + ax^2\right]_{0}^{a} = \boldsymbol{\tfrac{1}{3}a^3}$$

Daraus folgt, dass unabhängig von a der Flächeninhalt A_2 ein Viertel des Flächeninhaltes A_1 ist.