Übungsaufgabe Stochastik C1 - Lösungen
(Wahlteil schriftliches Abitur 2019-2020, BW)

Aufgabe C1
Der Body-Mass-Index ist eine Maßzahl für die Bewertung des Körpergewichts eines Menschen in Relation zu seiner Körpergröße.
Menschen mit einem BMI > 25 gelten laut diesem Index bereits als übergewichtig.

Laut statistischem Bundesamt waren im Jahr 2018 60% der männlichen Bevölkerung und 55% der weiblichen Bevölkerung übergewichtig (BMI >25).

a) Berechnen Sie, die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse:
A: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind genau 6 Männer übergewichtig."
B: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind mehr als die Hälfte übergewichtig."
C: „Unter 10 zufällig ausgewählten Männern sind nur die ersten drei nicht übergewichtig."

b) Bestimmen Sie, wie groß eine Gruppe weiblicher Personen mindestens sein muss, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens eine Frau in der Gruppe übergewichtig ist.

c) In der Gesamtbevölkerung Deutschlands betrug der Anteil der Übergewichtigen im Jahr 2018 laut statistischem Bundesamt 57 %.
Ein Dorf hat 500 Einwohner.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Anzahl der Übergewichtigen in diesem Dorf um weniger als 10 Personen vom Erwartungswert abweicht.

d) Vorsitzende von Sportvereinen behaupten, dass der Anteil der Übergewichtigen in Sportvereinen geringer als in der gesamten Bevölkerung sei.
Um dies zu überprüfen, wird die Nullhypothese H_0: $p \geq 0{,}57$ auf dem Signifikanzniveau 10% getestet und das BMI von 40 zufällig ausgewählten Mitgliedern von Sportvereinen ermittelt.
Bestimmen Sie die zugehörige Entscheidungsregel.

Lösung Aufgabe C1:

a) Die Zufallsvariable X_1 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter 10 beliebigen Männer. X_1 ist $B_{10;0,6}$ - verteilt.

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A:

$P(A) = P(X_1 = 6) =$ **0,25** (WTR)

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B:

$P(B) = P(X_1 \geq 6) = 1 - P(X_1 \leq 5) =$ **0,63** (WTR)

Wahrscheinlichkeit für das Ereignis C:

$P(C) = 0,4^3 \cdot 0,6^7 =$ **0,0018**

b) Die Zufallsvariable X_2 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter n beliebigen Frauen. X_2 ist $B_{n;0,55}$ – verteilt mit unbekanntem n.

$P(X_2 \geq 1) = 1 - P(X_2 = 0) > 0{,}99$ bzw. $P(X_2 = 0) \leq 0{,}01$
$\Leftrightarrow (0{,}45)^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow n \geq \log_{0,45}(0{,}01) = \frac{\log(0{,}01)}{\log(0{,}45)} \approx 5{,}76$ (WTR)

Die Gruppe muss mindestens 6 Frauen beinhalten.

c) Die Zufallsvariable X_3 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter 500 Personen. X_3 ist $B_{500;0,57}$ - verteilt.

Erwartungswertwert $\mu = n \cdot p = 500 \cdot 0{,}57 = 285$.
Die Abweichung beträgt weniger als 10 Personen, wenn sich in dem Dorf zwischen 276 und 294 übergewichtige Personen befinden.

Die Wahrscheinlichkeit hierfür beträgt $P(276 \leq X_3 \leq 294) \approx 0{,}633$ (WTR)

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Übergewichtigen im Dorf um weniger als 10 Personen vom Erwartungswert abweicht, beträgt etwa 63%.

d) Die Zufallsvariable X_4 beschreibt, die Anzahl der Übergewichtigen unter 40 zufällig ausgewählten Mitgliedern von Sportvereinen.
Gilt die Nullhypothese P_0: $p \geq 0{,}57$, so ist X_4 im Extremfall binomialverteilt mit den Parametern n = 40 und p = 0,57. Es handelt sich um einen linksseitigen Test.
Gesucht ist die kleinste natürlich Zahl g mit $P(X_4 \leq g) \geq 0{,}1$.
$P(X_4 \leq 18) = 0{,}0855$ und $P(X_4 \leq 19) = 0{,}1461$ (WTR).

Entscheidungsregel:
Ist die Anzahl der übergewichtigen Mitglieder von Sportvereinen bei 40 getesteten Personen maximal 18, so wird die Nullhypothese verworfen, andernfalls wird sie nicht verworfen.