

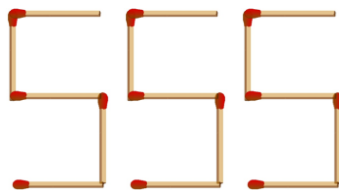
Problem des Monats

Oktober 2022

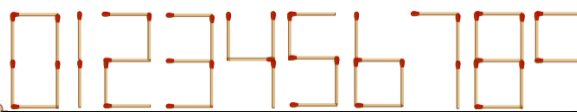
EXPERT

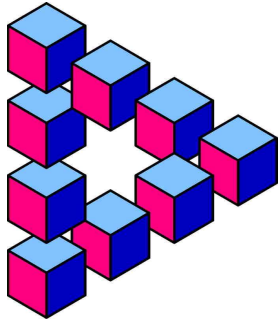
Streichholzmathematik

Gegeben ist die Zahl 555.



- a) Schreibe alle Zahlen auf, die durch das Umlegen eines Hölzchens gebildet werden können.
- b) Petra behauptet, dass man durch das Umlegen von genau zwei Hölzchen 30 verschiedene Zahlen aus der 555 legen kann. Stimmt das?





Problem des Monats

November 2022

EXPERT

Fußballturnier

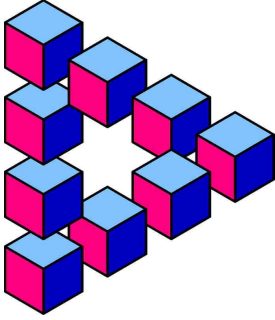
Bei einem Fußballturnier treten fünf Mannschaften gegeneinander an. Jede Mannschaft spielt gegen jede einmal.

Wie gewohnt erhält der Sieger eines Spiels drei Punkte, bei unentschieden gibt es für jedes Team einen Punkt. Bei Punktgleichheit entscheidet die Tordifferenz über die Platzierung. Ist die Tordifferenz auch gleich, entscheidet das Los.

Abschlusstabelle:

	P	T
1. Flinkies	8	4
2. Ratzfatz	8	3
3. Blitzschnell		
4. Sausewind	1	-4
5. Turbofix		

- Die Abschlusstabelle ist unvollständig. Die Platzierungen sind eindeutig, da keine zwei Mannschaften punkt- und torgleich sind.
Ergänze die fehlenden Punktzahlen und Tordifferenzen.
- Wie viele Punkte kann eine Mannschaft haben, wenn sie in der Abschlusstabelle unter fünf Mannschaften auf dem zweiten Platz steht?
- Wie viele Punkte kann eine Mannschaft haben, wenn sie in der Abschlusstabelle unter fünf Mannschaften auf dem vierten Platz steht?



Problem des Monats

Dezember 2022

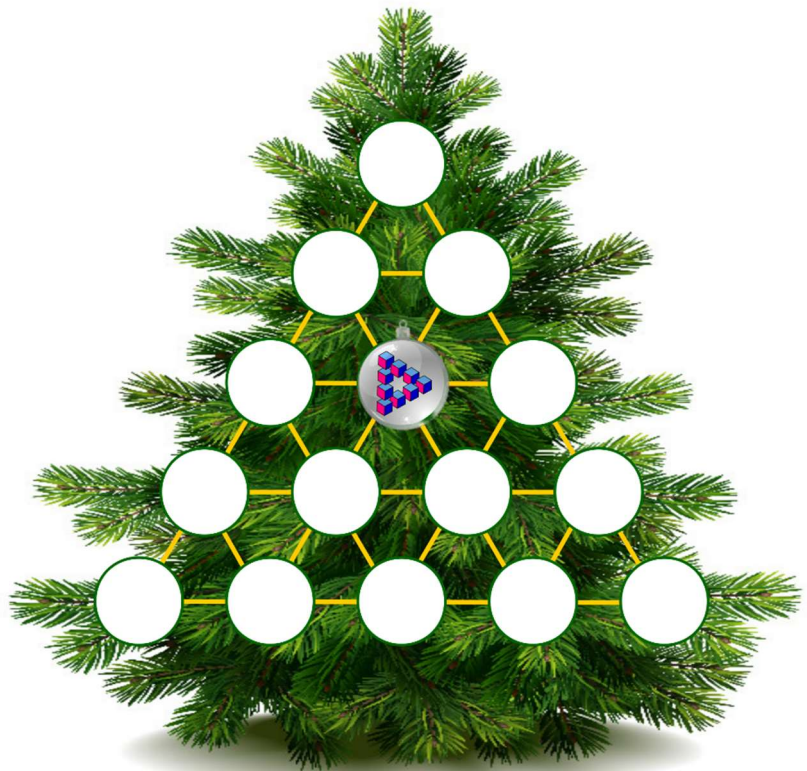
Baum schmücken

Marco und Petra schmücken ihren Weihnachtsbaum in diesem Jahr mit 15 Kugeln in fünf verschiedenen Farben.

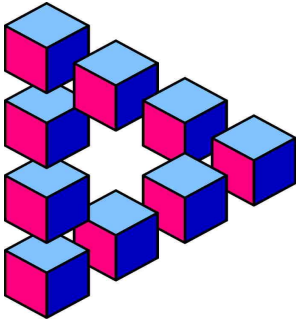
- ▶ Die silberne Kugel mit dem PdM-Logo hängt bereits.
- ▶ Jede der zwei gelben Kugeln soll genau vier Nachbarkugeln in jeweils einer der anderen vier Farben haben.
- ▶ Sie haben drei rote Kugeln:
Die erste soll am Rand (R), die zweite in einer Ecke (E) und die dritte in einer Mittenposition (M) hängen.
- ▶ Jeweils zwei ihrer vier blauen Kugeln sollen benachbart hängen, ohne jedoch eine zusammenhängende Kette zu bilden.
- ▶ Die fünf violetten Kugeln sollen eine zusammenhängende Kette bilden.



Beispielbaum: Die dunklen Felder bilden eine mögliche zusammenhängende Kette.



Es gibt mehrere Möglichkeiten den Baum mit diesen Vorgaben zu schmücken. Bestimme die Anzahl der Möglichkeiten und skizziere diese.



Problem des Monats

Januar 2023



binerdle

Auf der Seite <https://nerdlegame.com> gibt es auch das Rätsel *binerdle*, bei dem zwei Rechnungen gesucht werden.

Wie bei *nerdle* können alle Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 und die Rechenzeichen +, -, *, / verwendet werden. Man sieht zunächst, aus wie vielen Stellen die Rechnungen bestehen. Nach jedem Versuch bekommt man Hinweise. Alle Ziffern und Rechenzeichen, die in der Rechnung vorkommen, aber noch am falschen Platz sind, werden in **violett** markiert, entsprechend in **grün**, wenn auch der Platz stimmt.

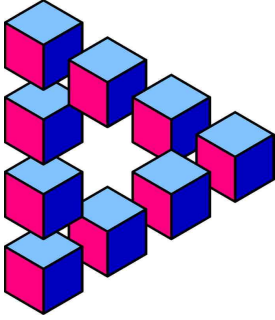
Jede Eingabe gilt **gleichzeitig** für beide Rechnungen, das heißt in jeder Zeile stehen links und rechts dieselben Zeichen.

a) Ergänze bei folgendem *binerdle* die fehlenden Zeilen.

3	9	1	-	5	4	=	3	3	7	3	9	1	-	5	4	=	3	3	7
7	+	9	9	6	=	1	0	0	3	7	+	9	9	6	=	1	0	0	3
7	0	7	*	9	=	6	3	6	3	7	0	7	*	9	=	6	3	6	3

b) Bei diesem *binerdle* sind nur die Ergebnisse bekannt. Ergänze die Rechnungen, die zur Lösung geführt haben.

								5	2	+	3	1	=	8	3
9	9	*	4	=	3	9	6								



Problem des Monats

Februar 2023

Welche Ziffer?

Das ist
die 2. Zeile. →

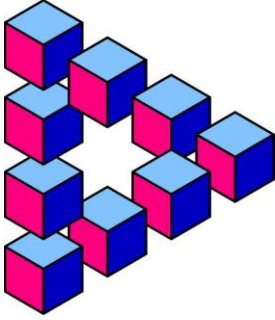
Diese 7
steht an
der 25. Stelle.

1	2	3	4	5	6	7	8
9	1	0	1	1	1	2	1
3	1	4	1	5	1	6	1
7	1	8	1	9	2	0	2
1	2	2	2	3	2	4	2

Micha zeigt Marco und Petra einen Zettel mit vielen Ziffern. Zunächst scheinen die Ziffern wahllos darauf zu stehen. Doch schon bald erkennen Marco und Petra das Muster und können es fortsetzen.

- Welche Ziffer steht an der 444. Stelle?
- In der 5. Zeile steht die Ziffer 2 zum ersten Mal dreimal hintereinander. Finde heraus, an welchen Stellen die Ziffer 2 zum ersten Mal fünfmal hintereinander steht.





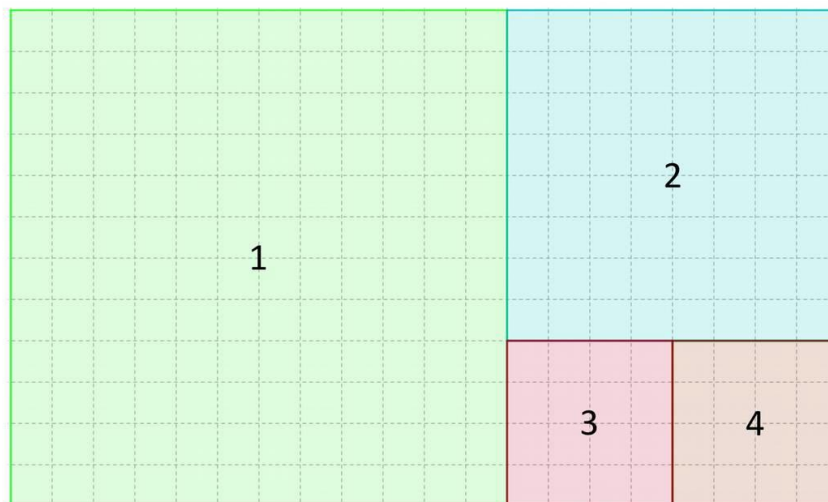
Problem des Monats

März 2023

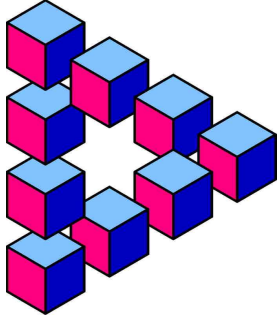
Viele Quadrate

Marco möchte Rechtecke in möglichst wenige Quadrate zerlegen. Dazu zeichnet er in ein gegebenes Rechteck ein größtmögliches Quadrat so ein, dass es an einer Randseite des Rechtecks liegt. Im übrig gebliebenen Rechteck verfährt er genauso, bis das Rechteck ausschließlich in Quadrate zerlegt ist.

Bei einem Rechteck, das 20 Kästchen lang und 12 Kästchen breit ist, kann er so vier Quadrate einzeichnen:



- Gib die Seitenlänge des kleinsten Quadrats an, wenn das Start-Rechteck 462 Kästchen lang und 195 Kästchen breit ist.
- Das Beispiel-Rechteck erfüllt folgende Bedingungen:
 - genau vier Quadrate können eingezeichnet werden und
 - jedes kleinste Quadrat hat eine Seitenlänge von vier Kästchen.
 Es gibt nur drei weitere Rechtecke, die diese beiden Bedingungen erfüllen. Gib ihre Seitenlängen an.



Problem des Monats

April 2023

EXPERTE

Quersumme als Wort

Petra betrachtet eine mehrstellige natürliche Zahl.

2611038

Von dieser berechnet sie die Quersumme, also die Summe ihrer Ziffernwerte

21

und formuliert anschließend die entstandene Zahl als Wort.

EINUNDZWANZIG

Von diesem Wort zählt sie abschließend die Anzahl der Buchstaben.

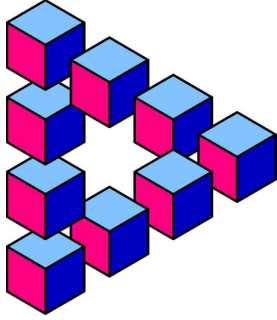
13



Mit diesem Vorgehen kann jede Startzahl in die Buchstabenanzahl ihrer Quersumme umgewandelt werden. Beachte dabei:

- Die erste Stelle der Startzahl darf nicht Null sein.
- Die Umlaute ä, ö, ü und auch ß bilden jeweils einen Buchstaben.
- Unter www.zahlen-ausschreiben.de findest du alle Zahlen in Worten.

- Bestimme die kleinste Startzahl, mit der du die kleinste Buchstabenanzahl erhalten kannst.
- Bestimme die kleinste Startzahl, mit der du die Buchstabenanzahl 17 erhältst.



Problem des Monats

Mai 2023 - Lösung

EXPERTS

Runde um Runde

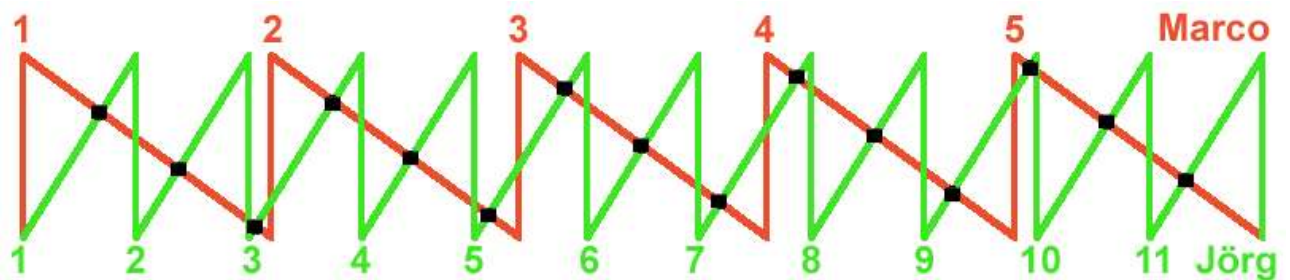
a) $j = 5, m = 11$

Sie begegnen sich unterwegs **15 Mal**.

b) Die Anzahl der Begegnungen berechnet sich allgemein nach der Formel $j + m - 1$.

Erklärung zu a:

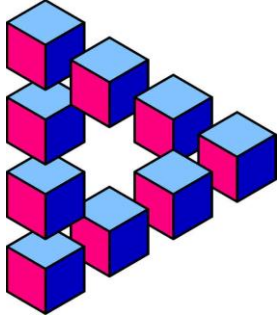
Die Anzahl der Runden, die beide fahren, kann man folgendermaßen an dem Diagramm ablesen:



Die Zeitpunkte der Begegnungen sind mit schwarzen Punkten markiert.

Es gilt $j + m - 1 = 5 + 11 - 1 = 15$





Problem des Monats

Juni 2023

EXPERT

Tolle Zahlen

Eine natürliche Zahl nennen Marco und Petra *toll*, wenn sie durch jede ihrer Ziffern teilbar ist und keine Ziffer in der Zahl mehrfach vorkommt.

Ein Beispiel für eine *tolle* Zahl ist 672:

Jede Ziffer kommt nur einmal vor.

672

$672 : 6 = 112$

$672 : 7 = 96$

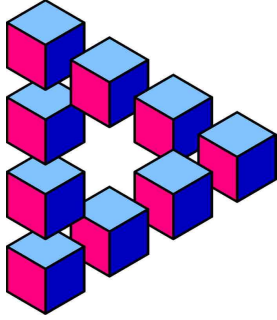
$672 : 2 = 336$

1184 ist keine *tolle* Zahl, da die Ziffer 1 zweimal vorkommt.

Auch 684 ist keine *tolle* Zahl, da sie nicht durch 8 teilbar ist.

Da man nicht durch 0 teilen darf, kann keine Zahl mit der Ziffer 0 eine *tolle* Zahl sein.

Bestimme die größte *tolle* Zahl, die als Endziffern 216 (in dieser Reihenfolge) hat.



Problem des Monats

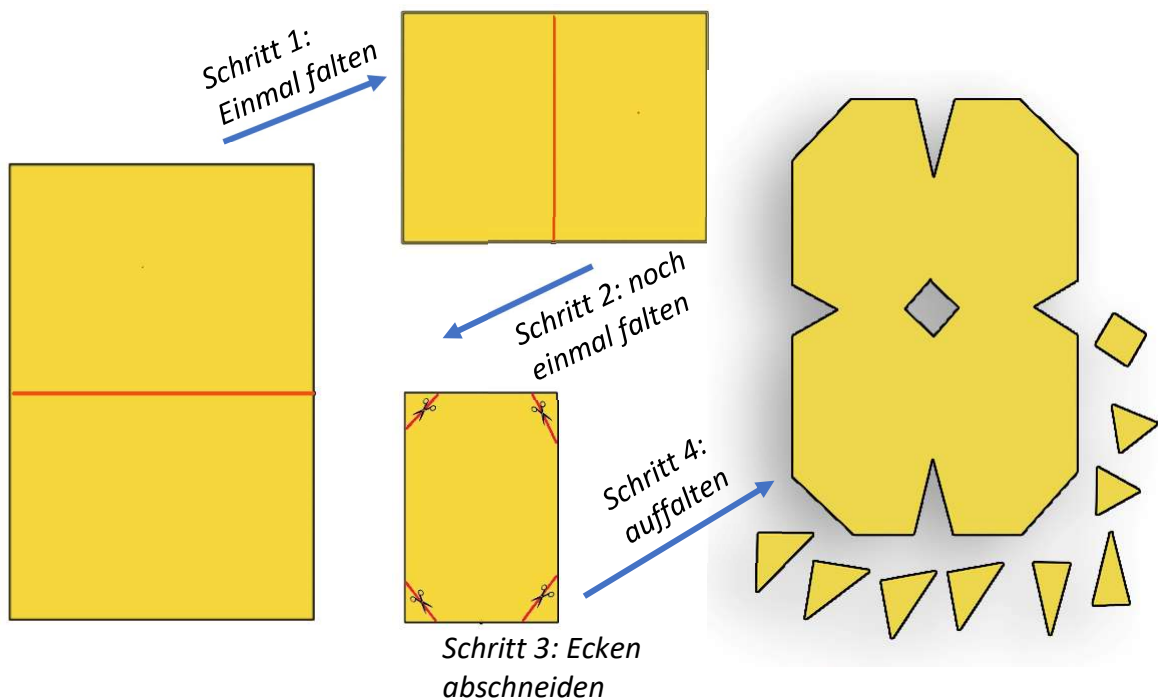
Juli 2023

EXPERIMENT

Schnipselei

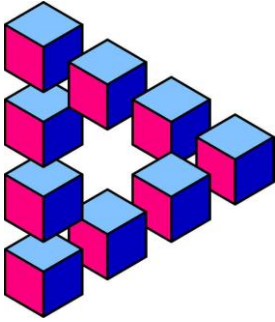
Experiment „zweimal falten und schnipseln“

Falte ein rechteckiges Blatt an der Mittellinie. Falte das Blatt noch einmal über der Hälfte. Das Blatt besteht jetzt aus vier Lagen. Schneide die vier Ecken ab und falte das Blatt auf. Das Blatt hat ein Loch und dazu sind neun Schnipsel entstanden (acht Dreiecke und ein Viereck).



Beim **Experiment „dreimal falten und schnipseln“** wird ein rechteckiges Blatt dreimal über die Hälfte gefaltet, so dass es aus acht Lagen besteht. Auch hierbei werden anschließend die vier Ecken abgeschnitten und wieder aufgefaltet. Das Blatt hat dann drei Löcher. Außerdem sind 15 Schnipsel entstanden (zwölf Dreiecke und drei Vierecke).

Das Abschneiden der Ecken wird bei jeder weiteren Faltung schwieriger. Theoretisch ist aber auch **„siebenmal falten und schnipseln“** denkbar. Finde für diesen Fall die Anzahl der Schnipsel heraus.



Problem des Monats

Oktober 2022



Lösung:

a) Mit dem Umlegen eines Hölzchens kann man aus einer 5 die Ziffern 3, 6 und 9 legen. Daraus ergeben sich die Zahlen 553, 535, 355, 556, 565, 655, 595, 559, 955.

b) Ja, die Behauptung stimmt.

Mit dem Umlegen eines Hölzchens in zwei verschiedenen Ziffern ergibt sich:

- eine 5 und zwei gleiche Ziffern:

533, 353, 335, 566, 656, 665, 599, 959, 995

- eine 5 und eine 3 und eine 6: 536, 563, 356, 653, 365, 635

- eine 5 und eine 3 und eine 9: 539, 593, 359, 953, 395, 935

- eine 5 und eine 6 und eine 9: 596, 569, 956, 659, 965, 695

Aus der 5 kann man durch Umlegen von zwei Hölzchen die 2 legen.

Damit ergeben sich die drei Lösungen: 255, 525 und 552.

Insgesamt gibt es daher $9 + 3 \cdot 6 + 3 = 30$ Lösungen.

Alternative Lösung (einer besonders aufmerksamen Schülerin):

Um aus der 5 eine 3, 6 oder 9 zu bekommen, muss man nur ein Hölzchen umlegen. Diese Zahlen kann man – genau genommen - auch erreichen, indem man innerhalb einer 5 zwei Hölzchen umlegt.

Dann erhält man noch 9 weitere Lösungen:

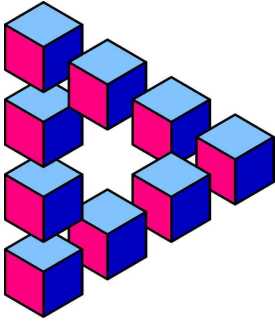
355, 535 und 553,

655, 565 und 556,

955, 595 und 559.

Insgesamt gibt es daher $9 + 3 \cdot 6 + 3 + 9 = 39$ Lösungen.

Die Behauptung stimmt nicht.



Problem des Monats

Oktober 2022



Lösung:

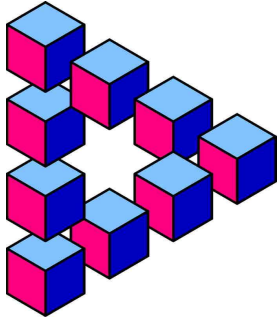
a)

Abschlusstabelle:		
	P	T
1. Flinkies	8	4
2. Ratzfatz	8	3
3. Blitzschnell	8	2
4. Sausewind	1	-4
5. Turbofix	1	-5

	F	R	B	S	T
F	X	0:0	0:0	2:0	2:0
R	0:0	X	0:0	1:0	2:0
B	0:0	0:0	X	1:0	1:0
S	0:2	0:1	0:1	X	0:0
T	0:2	0:2	0:1	0:0	X

Bemerkung: Die Punktzahlen und Tordifferenzen in der Abschlusstabelle links sind eindeutig. Die einzelnen Ergebnisse rechts sind nur Beispiele.

- b) Der Zweitplatzierte einer solchen Tabelle hat mindestens 3 und höchstens 10 Punkte. Auch alle Punktzahlen zwischen 3 und 10 sind möglich.
- c) Der Viertplatzierte einer solchen Tabelle hat mindestens 1 und höchstens 4 Punkte. Auch 2 oder 3 Punkte sind möglich.



Problem des Monats

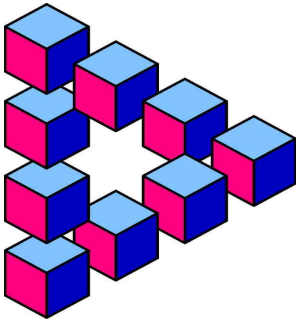
Dezember 2022 - Lösung

Baum schmücken

Marco und Petra haben insgesamt sechs Möglichkeiten ihren Baum zu schmücken: Drei verschiedene und die jeweils gespiegelte Anordnung der Kugeln.



Frohe
Weihnachten!



Problem des Monats

Januar 2023 - Lösung



EXPERT

a)

3	9	1	-	5	4	=	3	3	7	—	3	9	1	-	5	4	=	3	3	7
7	+	9	9	6	=	1	0	0	3	—	7	+	9	9	6	=	1	0	0	3
7	0	7	*	9	=	6	3	6	3	—	7	0	7	*	9	=	6	3	6	3
2	0	2	2	/	6	=	3	3	7	—	2	0	2	2	/	6	=	3	3	7
										—	7	*	2	8	9	=	2	0	2	3

b)

1	2	+	3	7	=	4	9	—	1	2	+	3	7	=	4	9
5	2	+	3	1	=	8	3	—	5	2	+	3	1	=	8	3
9	4	*	9	=	8	4	6	—								
9	9	*	4	=	3	9	6	—								

Hinweis zu Aufgabe b:

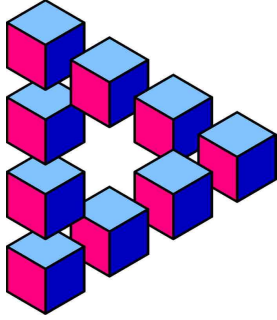
Den ersten Rateversuch $32+37=69$ würde *nerdlegames* im linken Block so markieren:

$$3 \ 2 \ + \ 3 \ 7 \ = \ 6 \ 9$$

Das heißt: Ziffern, die an der falschen Stelle stehen, werden von links nach rechts violett markiert. Diese Regel haben wir nicht explizit erwähnt. Daher sind folgende beiden ersten Zeilen auch richtig:

$$3 \ 2 \ + \ 3 \ 7 \ = \ 6 \ 9 \text{ oder } 3 \ 2 \ + \ 3 \ 2 \ = \ 6 \ 4$$





Problem des Monats

Februar 2023 – Lösung

Welche Ziffer?

- a) An der 444. Stelle steht **die Ziffer 4**.
 b) Nach der 555. Stelle kommen 5 Zweier, also an den Stellen **556, 557, 558, 559 und 560**.

Erklärung zu a)

Die Zahlen 1 bis 99 benötigen $9 + 2 \cdot 90 = 189$ Stellen. An der 190. Stelle beginnt die Zahl 100.

23	3	9	4	9	5	9	6	9
24	7	9	8	9	9	1	0	0
25	1	0	1	1	0	2	1	0

Bei den dreistelligen Zahlen steht die erste Ziffer der nächsten Zahl immer drei Stellen weiter als die vorherige:

An der $(190 + 3n)$. Stelle beginnt die Zahl $(100 + n)$.

An der 442. Stelle beginnt die Zahl 184 ($n = 84$).

An der 444. Stelle steht daher **die Ziffer 4**.

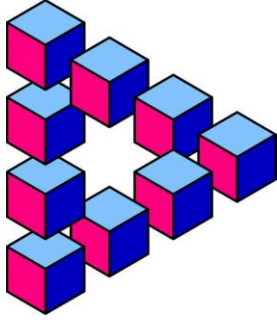
55	1	8	1	1	8	2	1	8
56	3	1	8	4	1	8	5	1
57	8	6	1	8	7	1	8	8

Erklärung zu b)

Die Ziffer 2 steht bei den Zahlen 222 und 223 fünfmal hintereinander.

Die erste 2 ist die $(190 + 3 \cdot 122)$. Stelle, also **die Stelle 556**.

68	5	2	1	6	2	1	7	2
69	1	8	2	1	9	2	2	0
70	2	2	1	2	2	2	2	2
71	3	2	2	4	2	2	5	2



Problem des Monats

März 2023 - Lösung

Viele Quadrate

a) Das kleinste Quadrat hat eine Seitenlänge von **3 Kästchen**.

Das Rechteck wird in 12 Quadrate zerlegt:

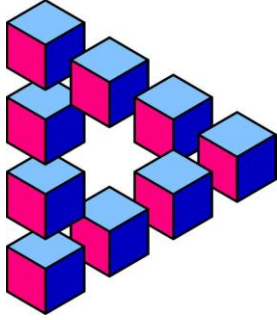
- zwei Quadrate haben die Seitenlänge 195 Kästchen,
- zwei Quadrate haben die Seitenlänge 72 Kästchen,
- ein Quadrat hat die Seitenlänge 51 Kästchen,
- zwei Quadrate haben die Seitenlänge 21 Kästchen,
- zwei Quadrate haben die Seitenlänge 9 Kästchen und
- drei Quadrate haben die Seitenlänge 3 Kästchen.

Bemerkung: Diese Art der Zerlegung ist eine zeichnerische Methode zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers (=ggT) von zwei natürlichen Zahlen. Der ggT entspricht der Seitenlänge der kleinsten Quadrate.

Allgemein gilt: $\text{ggT}(\text{Länge des Rechtecks, Breite des Rechtecks}) =$
Seitenlänge des kleinsten Quadrats

Hier gilt daher: **$\text{ggT}(462;195) = 3$**

b) Die Seitenlängen der drei gesuchten Rechtecke sind
16 und 4, 16 und 12 sowie 20 und 8.



Problem des Monats

April 2023 - Lösung

Quersumme als Wort

- a) Die kleinste gesuchte Startzahl ist **29**.
 b) Die kleinste gesuchte Startzahl ist **39 999 999 999 999**.

Erklärung: Zunächst muss man erfassen, welche Buchstabenanzahl jeweils relevante (Zahlen-)Worte bilden.

Wort(-teil)	Anzahl Buchstaben
elf	3
eins, zwei, drei, vier, fünf, acht, neun, zehn	4
sechs, zwölf	5
sieben	6
und	3
zwanzig, dreißig, vierzig, fünfzig ..	7
ehnhundert	10
zweihundert, dreihundert ..	11

Zu a)

29

11

ELF

3

Zu b)

39 999 999 999 999

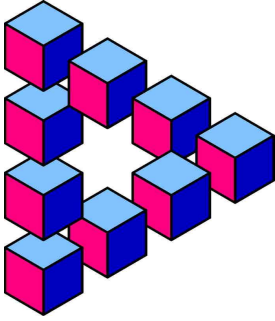
120

EINHUNDERTZWANZIG

17

Hinweis zu b): Die korrekte Schreibweise für die Zahl 120 ist *ehnhundertzwanzig*.

Für diejenigen, die „*hundertzwanzig*“ umgangssprachlich verwenden, wäre die kleinste Startzahl 207, um die Buchstabenanzahl 17 zu erhalten.



Problem des Monats

Mai 2023



Runde um Runde

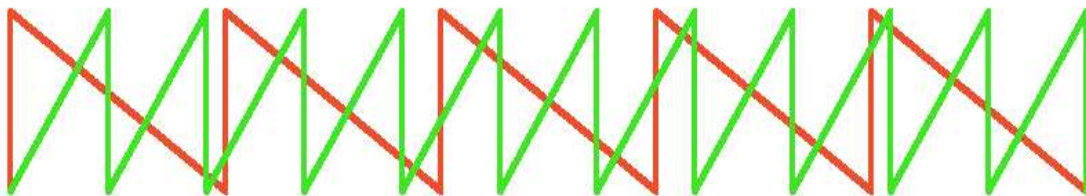
Marco fährt mit seinem Fahrrad oft einen Rundweg, der direkt an der Einfahrt zum Wohnhaus seiner Familie beginnt. Manchmal kommt auch sein jüngerer Bruder Jörg mit.

Dabei haben die beiden festgestellt, dass Marco in der Zeit, in der Jörg j Runden radelt, sogar m Runden schafft.

An einem sonnigen Samstag starten sie gleichzeitig, fahren in entgegengesetzter Richtung und treffen sich in der Einfahrt zu ihrem Haus wieder. Marco ist dabei m Runden gefahren.

Wie oft sind sie sich in der Zwischenzeit begegnet?

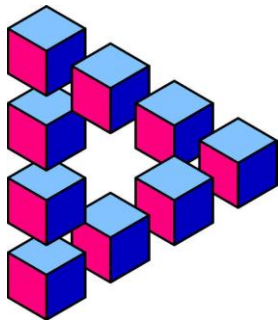
- a) Marcos Freund löst diese Aufgabe zunächst an einem Zahlenbeispiel mit Hilfe folgender Grafik:



Was muss man für j und für m einsetzen, damit diese Graphik zu der Aufgabenstellung passt?

Wie oft sind sie sich bei dieser Fahrt unterwegs begegnet?

- b) Wie lautet die allgemeine Lösung für die Aufgabe:
Jörg und Marco fahren in entgegengesetzter Richtung.
Marco fährt m Runden, während Jörg in der gleichen Zeit j Runden schafft ($m > j$).
Wie oft begegnen sie sich unterwegs?



Problem des Monats

Juni 2023 - Lösung

Tolle Zahlen



Die größte *tolle* Zahl mit den Endziffern 216 (in dieser Reihenfolge) ist

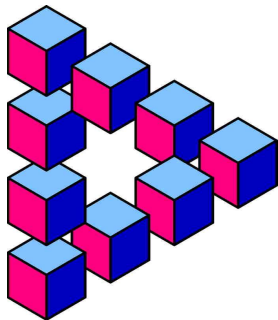


Jede Zahl, die auf 216 endet, ist durch 1, 2, 4 und 8 teilbar, aber keine dieser Zahlen ist durch 5 teilbar. Wenn wir alle weiteren möglichen Ziffern, also 3, 4, 7, 8 und 9 vor die Endziffern 216 setzen, erhalten wir die Quersumme 40, also kein Vielfaches von 3 oder 9.

Ohne die Ziffer 4 jedoch ergibt sich in der Summe aus 3, 7, 8, 9, 2, 1 und 6 die Zahl 36 und damit ein Vielfaches von 3 und 9.

Nun prüft man in den verschiedenen Kombinationsmöglichkeiten der Ziffern 3, 7, 8 und 9 (platziert vor 216) die Teilbarkeit durch 7 und erhält als (größte) Lösung 8973216.

Hinweis: Die zwei weiteren siebenstelligen *tollen* Zahlen sind 7839126 und 7398216.



Problem des Monats

Juli 2023 - Lösung

Schnipsel



Die Anzahl der Schnipsel beträgt **153**.

Anzahl der Faltungen	Anzahl der Dreiecke	Anzahl der Vierecke	Gesamtanzahl der Schnipsel
0	4	0	4
1	6	0	6
2	8	1	9
3	12	3	15
4	16	9	25
5	24	21	45
6	32	49	81
7	48	105	153
8	64	225	289

Es gibt hier eine allgemeine Formel, allerdings muss dabei man unterscheiden, ob die Anzahl n der Faltungen gerade oder ungerade ist.

Für ungerades n beträgt die Anzahl der

$$\text{Dreiecke } 3 \cdot 2^{\frac{n+1}{2}} \quad \text{und der Vierecke } (2^{\frac{n+1}{2}} - 1) \cdot (2^{\frac{n-1}{2}} - 1).$$

Für gerades n beträgt die Anzahl der

$$\text{Dreiecke } 4 \cdot 2^{\frac{n}{2}} \quad \text{und der Vierecke } (2^{\frac{n}{2}} - 1)^2.$$