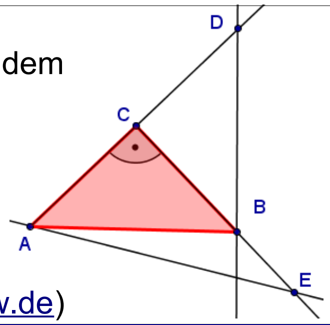
LWM 2010, Aufgabe 5

Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit dem rechten Winkel bei *C*. Die Punkte *D* und *E* liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden *AC* bzw. *CB* (vgl. Abbildung).

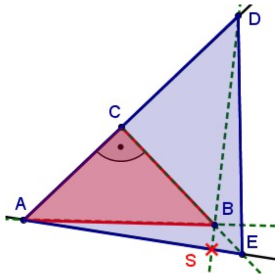


Beweise: Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden *AE* und *BD* rechtwinklig schneiden.

(Hinweis: Animation auf www.mathematik-bw.de)

Lösungsvorschlag:

Teil 1 („ ⇒ "): Aus der Streckengleichheit $\overline{CD}=\overline{CE}$ wird auf die Orthogonalität der Geraden *AE* und *BD* geschlossen.



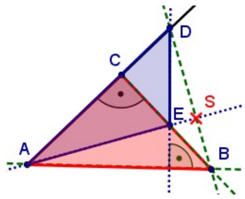
Vorüberlegungen: Um einen rechten Winkel nachzuweisen könnten wir

- die Umkehrung des Thalessatzes verwenden. Der Mittelpunkt dieses Kreises durch *S* müsste die Strecke $\overline{DE}$ halbieren (vgl. Skizze rechts).
- Ähnlichkeit zu einem rechtwinkligen Dreieck nachweisen.
- nachweisen, dass *B* Höhenschnittpunkt im Dreieck ΔAED ist. Dann wäre die Gerade *BD* eine Höhe und die Behauptung wäre bewiesen.

Wir wählen die dritte „Beweistaktik":

Nach Voraussetzung sind die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ gleich lang. Das Dreieck ΔCED ist somit gleichschenklig und rechtwinklig.

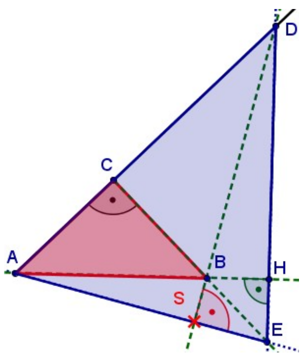
Die Gerade *CB* ist damit schon einmal als Höhe im Dreieck ΔAED überführt. Da im Dreieck ΔABC bei *A* (wie in ΔCED bei D) ein 45°-Winkel liegt, muss die Gerade *AB* die Gerade *DE* in einem rechten Winkel schneiden (Winkelsumme im Dreieck). Damit ist *B* der Höhenschnittpunkt und die Gerade *DB* muss als dritte Höhe orthogonal zur entsprechenden Seite liegen. (Der Punkt *S* ist dann der entsprechende Höhenfußpunkt auf der Seite *AE*.)



Bemerkung: Wenn $\overline{CE}<\overline{CB}$ wird ΔAED stumpfwinklig. Der Punkt *S* ist bei unserer Voraussetzung trotzdem Höhenfußpunkt in ΔAED, liegt aber außerhalb des Dreiecks auf der Verlängerung der Seite *AE*.

Teil 2 („ ⇐ "): Wegen der Formulierung „genau dann" müssen wir auch die Umkehrung beweisen: „Aus einem rechten Winkel bei *S* folgt die Streckengleichheit $\overline{CD}=\overline{CE}$."

Vorüberlegung:



Wir sind fertig, wenn wir zeigen, dass das Dreieck ΔCED gleichschenklig ist.

Mit dem rechten Winkel bei *S*, folgt, dass *DB* Höhe im Dreieck ΔAED ist. Damit muss *B* Höhenschnittpunkt sein und die Gerade *AB* (als dritte Höhe) orthogonal zur Geraden *DE* liegen.

Wegen dem rechten Winkel bei *H* und den beiden 45° Scheitelwinkeln bei *B* ist das Dreieck ΔBEH gleichschenklig mit 45°-Basiswinkeln (insbesondere bei *E*). Wegen dem rechten Winkel bei *C* ist damit aber auch ΔCED gleichschenklig (Winkelsummensatz im Dreieck, Basiswinkelsatz). ***q. e. d.***