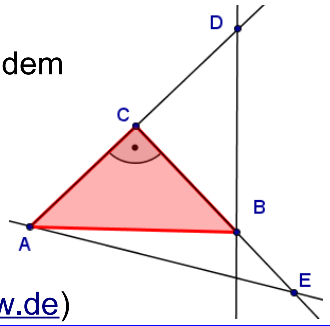
LWM 2010, Aufgabe 5

Gegeben ist ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck *ABC* mit dem rechten Winkel bei *C*. Die Punkte *D* und *E* liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden *AC* bzw. *CB* (vgl. Abbildung).

Beweise: Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden *AE* und *BD* rechtwinklig schneiden.



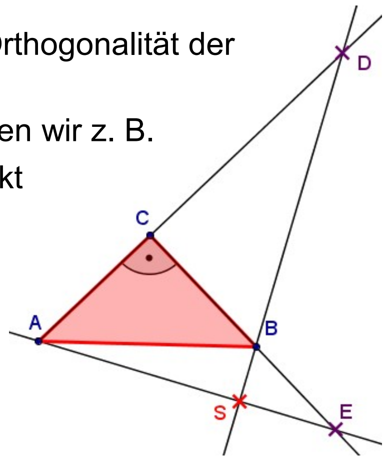
(***Hinweis:*** Animation auf www.mathematik-bw.de)

Lösungsvorschlag:

Teil 1 („ ⇒ “): Aus der Streckengleichheit $\overline{CD}=\overline{CE}$ wird auf die Orthogonalität der Geraden *AE* und *BD* geschlossen.

Vorüberlegungen: Um einen rechten Winkel nachzuweisen könnten wir z. B.

- die Umkehrung des Thalessatzes verwenden. Der Mittelpunkt dieses Kreises durch *S* müsste die Strecke $\overline{DE}$ halbieren.
- Ähnlichkeit zu einem rechtwinkligen Dreieck nachweisen.
- nachweisen, dass *B* Höhenschnittpunkt im Dreieck $\Delta\,AED$ ist. Dann wäre die Gerade *BD* eine Höhe und die Behauptung wäre bewiesen.



Wir wählen die zweite „Beweistaktik“.

Schritt 1:
(Voraussetzung: *ABC* gleichschenklig-rechtwinklig und $\overline{CD}=\overline{CE}$)

Zeige mit der Voraussetzung und einem geeigneten Kongruenzsatz, dass die Dreiecke *AEC* und *BDC* kongruent sind.

Schritt 2:

Weise die Gleichheit der Innenwinkel von den Dreiecken *BDC* und *EBS* nach.

Schritt 3:

Aus *Schritt 2* folgt unmittelbar die Behauptung $(AE \perp BD)$.

Teil 2 („ ⇐ “): Wegen der Formulierung „genau dann“ müssen wir auch die Umkehrung beweisen: „Aus einem rechten Winkel bei *S* folgt die Streckengleichheit $\overline{CD}=\overline{CE}$ “

(Voraussetzung: *ABC* gleichschenklig-rechtwinklig und $AE \perp BD$)

Zeige mit der Voraussetzung und einem geeigneten Kongruenzsatz, dass die Dreiecke *AEC* und *BDC* kongruent sind.

Gehe dabei in umgekehrter Richtung zu *Teil 1* vor.