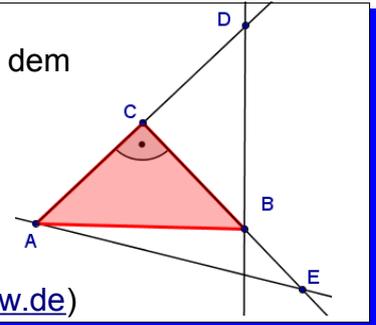


LWM 2010, Aufgabe 5

Gegeben ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C . Die Punkte D und E liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden AC bzw. CB (vgl. Abbildung).

Beweise: Die Strecken \overline{CD} und \overline{CE} sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden AE und BD rechtwinklig schneiden.

(Hinweis: Animation auf www.mathematik-bw.de)

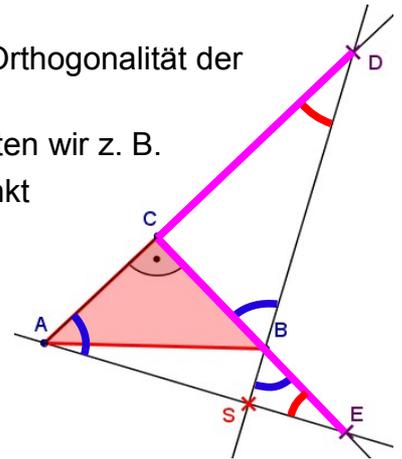


Lösungsvorschlag:

Teil 1 („ \Rightarrow “): Aus der Streckengleichheit $\overline{CD} = \overline{CE}$ wird auf die Orthogonalität der Geraden AE und BD geschlossen.

Vorüberlegungen: Um einen rechten Winkel nachzuweisen könnten wir z. B.

- die Umkehrung des Thalesatzes verwenden. Der Mittelpunkt dieses Kreises durch S müsste die Strecke \overline{DE} halbieren.
- Ähnlichkeit zu einem rechtwinkligen Dreieck nachweisen.
- nachweisen, dass B Höhenschnittpunkt im Dreieck $\triangle AED$ ist. Dann wäre die Gerade BD eine Höhe und die Behauptung wäre bewiesen.



Wir wählen die zweite „Beweistaktik“.

Schritt 1:

(Voraussetzung: ABC gleichschenkelig-rechtwinklig und $\overline{CD} = \overline{CE}$)

Es gilt $\overline{CD} = \overline{CE}$ und $\overline{CB} = \overline{AC}$ beide Dreiecke haben bei C einen rechten Winkel. Mit **sws** folgt $\triangle BDC$ kongruent $\triangle AEC$.

Zeige mit der Voraussetzung und einem geeigneten Kongruenzsatz, dass die Dreiecke AEC und BDC kongruent sind.

Schritt 2:

Die beiden blauen Winkel bei B sind gleich (Scheitelwinkel). Die roten Winkel bei D und E ebenfalls (Kongruenz aus Schritt 1). Damit sind alle Winkel der Dreiecke $\triangle BDC$ und $\triangle EBS$ gleich (Winkelsummensatz).

Weise die Gleichheit der Innenwinkel von den Dreiecken BDC und EBS nach.

Schritt 3:

Aus der Winkelgleichheit $\angle BCD = 90^\circ = \angle ESB$ folgt die Behauptung ($AE \perp BD$).

Aus Schritt 2 folgt unmittelbar die Behauptung ($AE \perp BD$).

Teil 2 („ \Leftarrow “): Wegen der Formulierung „genau dann“ müssen wir auch die Umkehrung beweisen: „Aus einem rechten Winkel bei S folgt die Streckengleichheit $\overline{CD} = \overline{CE}$ “

(Voraussetzung: ABC gleichschenkelig-rechtwinklig und $AE \perp BD$.)

Wegen den Scheitelwinkeln bei B und den rechten Winkeln bei S und C stimmen auch die roten Winkel bei E und D überein (Winkelsummensatz in $\triangle BDC$ und $\triangle EBS$).

Wegen $\overline{CB} = \overline{AC}$ und **sww** gilt die Kongruenz

$$\triangle BDC \cong \triangle AEC \rightarrow \overline{CD} = \overline{CE}$$

q. e. d.

Zeige mit der Voraussetzung und einem geeigneten Kongruenzsatz, dass die Dreiecke AEC und BDC kongruent sind. Gehe dabei in umgekehrter Richtung zu Teil 1 vor.