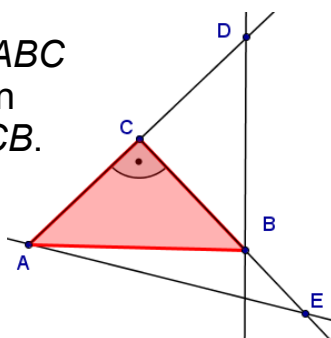


Arbeitsblatt: Vektorbeweis mit Orthogonalität (LWM 2010 Runde 1, Aufg.5)

Gegeben ist ein gleichschenkelig-rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C . Die Punkte D und E liegen außerhalb des Dreiecks auf den Halbgeraden AC bzw. CB .

Beweise mit Vektoren: Die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ sind genau dann gleich lang, wenn sich die Geraden AE und BD rechtwinklig schneiden.



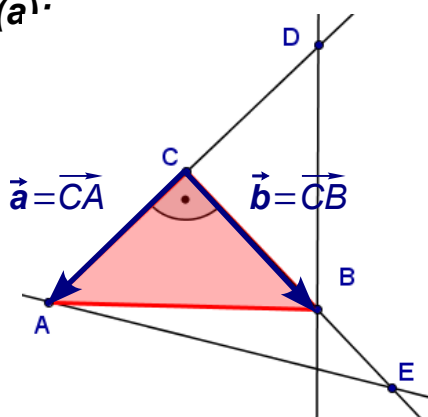
Lösungsvorschlag:

Teil 1 („ $\Rightarrow$ “): Aus der Streckengleichheit $\overline{CD} = \overline{CE}$ wird auf die Orthogonalität der Geraden AE und BD geschlossen.

Vorüberlegungen:

- Für den Nachweis des rechten Winkels benutzen wir das Skalarprodukt. Hierfür müssen wir zwei Basisvektoren definieren.
- Mit den beiden Basisvektoren müssen wir im nächsten Schritt die Strecken $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ sowie die Richtungen der Geraden AE und BD beschreiben.
- Schließlich muss sich aus der Streckengleichheit von $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ ergeben, dass das SKP der Richtungsvektoren der Geraden null ist.

zu (a):



Aus der Grundvoraussetzung (gleichsch.-rw. Dreieck) bieten sich als Basisvektoren $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$ und $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ an.
Es gilt: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

zu (b):

Mit einem (gemeinsamen) positiven Streckfaktor k lässt sich die Streckengleichheit von $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ beschreiben:

$$\overrightarrow{CD} = -k \cdot \vec{a} \quad \overrightarrow{CE} = k \cdot \vec{b} \quad (k > 0)$$

Richtungsvektoren der Geraden:

$$\overrightarrow{BD} = -k \cdot \vec{a} - \vec{b} \quad \overrightarrow{AE} = k \cdot \vec{b} - \vec{a}$$

„Spitze“ minus „Schaft“

Mit dem gemeinsamen Streckfaktor k geht die Streckengleichheit von $\overrightarrow{CD}$ und $\overrightarrow{CE}$ ein.

zu (c):

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} &= (-k \cdot \vec{a} - \vec{b}) \cdot (k \cdot \vec{b} - \vec{a}) \\
 &= -k^2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + k \cdot (\vec{a})^2 - k \cdot (\vec{b})^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= 0 + k \cdot |\vec{a}|^2 - k \cdot |\vec{b}|^2 + 0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Das SKP der Basisvektoren ist null, darüber hinaus ist ihre Länge gleich (s. o.).

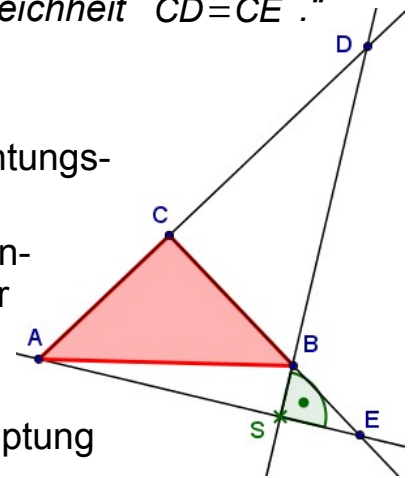
Damit ist gezeigt, dass die Geraden BD und AE orthogonal zueinander stehen.

Teil 2 („ $\Leftarrow$ “): (Wegen der Formulierung „genau dann“ müssen wir auch die Umkehrung von *Teil 1* beweisen):

„Aus einem rechten Winkel bei S folgt die Streckengleichheit $\overline{CD} = \overline{CE}$.“
(siehe Skizze rechts).

Vorüberlegungen:

- (a) Nun gehen wir davon aus, dass das SKP der Richtungsvektoren von den Geraden null ist.
- (b) Wir müssen zunächst von verschiedenen Streckenlängen $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ ausgehen. Damit müssen wir auch die Beschreibungen der Vektoren $\overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AE}$ anpassen.
- (c) Aus der Voraussetzung (a) müssen wir die Behauptung ($\overline{CD} = \overline{CE}$) begründen.



zu (a):

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$$

Die Geraden AE und BD schneiden sich senkrecht.

zu (b):

Wir wählen dieses Mal zwei verschiedene Streckfaktoren:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CD} &= -k_1 \cdot \vec{a} & \overrightarrow{CE} &= k_2 \cdot \vec{b} \quad (k_1 > 0; k_2 > 0) \\
 \overrightarrow{BD} &= -k_1 \cdot \vec{a} - \vec{b} & \overrightarrow{AE} &= k_2 \cdot \vec{b} - \vec{a}
 \end{aligned}$$

Damit beschreiben wir, dass die Streckenlängen $\overline{CD}$ und $\overline{CE}$ nicht unbedingt gleich lang sein müssen.

zu (c):

$$\begin{aligned}
 0 &= \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AE} \\
 &= (-k_1 \cdot \vec{a} - \vec{b}) \cdot (k_2 \cdot \vec{b} - \vec{a}) \\
 &= -k_1 \cdot k_2 \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + k_1 \cdot (\vec{a})^2 - k_2 \cdot (\vec{b})^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} \\
 &= 0 + k_1 \cdot |\vec{a}|^2 - k_2 \cdot |\vec{b}|^2 + 0 \\
 \rightarrow k_1 &= k_2
 \end{aligned}$$

Weil die Basisvektoren gleich lang sind und orthogonal zueinander stehen, kann das Skalarprodukt nur null sein, wenn $k_1 = k_2$ ist.

Damit ist die Streckengleichheit $\overline{CD} = \overline{CE}$ nachgewiesen.

q. e. d.