

### Im Dutzend

In ein quadratisches Gitternetz zeichnet man einen Kreis. Sein Mittelpunkt liegt auf einem Gitterpunkt, sein Radius ist doppelt so groß wie der Abstand zweier benachbarter Gitterlinien.

Der Kreis schneidet die Gitterlinien in 12 Punkten. Diese bilden die Ecken eines Zwölfecks.

**Ist dieses Zwölfeck regelmäßig? Begründe!**

#### Behauptung:

Das auf die obige Art konstruierte 12-Eck ist regelmäßig.

#### Beweis:

Wir werden zeigen, dass der Winkel  $\angle AMB$  genau  $30^\circ$  weit ist. Aus Symmetriegründen ist somit auch der Winkel  $\angle CMD$  gleich groß. Damit zerfällt der  $90^\circ$  Winkel  $\angle AMD$  in drei  $30^\circ$ -Winkel. Da dies für alle „Kreisviertel“ gilt, markieren die Schnittpunkte der Schenkel mit der Kreislinie ein regelmäßiges 12-Eck.

*Wir nutzen aus, dass der Abstand von B zur Strecke  $\overline{MA}$  genau halb so groß ist, wie der Kreisradius.*

Fällen wir also zunächst das Lot von B auf  $\overline{MA}$  und nennen den Lotfußpunkt P. Darüber hinaus bezeichnen wir die Mitte der Strecke  $\overline{MB}$  mit Q.

Dieser Punkt Q liegt auf der Mittelsenkrechten von  $\overline{MP}$ . (Warum?) Daher ist das Dreieck  $\triangle PMQ$  gleichschenkelig. Hieraus folgt wiederum dass das Dreieck  $\triangle PQB$  gleichseitig ist.

Betrachten wir schließlich das (rechtwinklige) Dreieck  $\triangle PMB$ , so liegt bei B ein  $60^\circ$ -Innenwinkel. Wegen dem  $90^\circ$ -Winkel bei P verbleiben für den Innenwinkel bei M noch  $30^\circ$ .

Das war zu zeigen.

Wir **merken uns** aus dieser Aufgabe:

**Bei einem rechtwinkligen Dreieck mit einem Innenwinkel von  $30^\circ$  ist die dem Winkel gegenüber liegende Seite genau halb so lang, wie die Hypotenuse.**

**Umgekehrt gilt: Ist bei einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete genau halb so lang wie die Hypotenuse, so beträgt der gegenüber liegende Winkel genau  $30^\circ$ .**

**Hinweis:** Ein sehr kurzer, eleganter Alternativbeweis dieser Behauptungen verläuft über eine Achsenspiegelung der kurzen Kathete an der langen.

