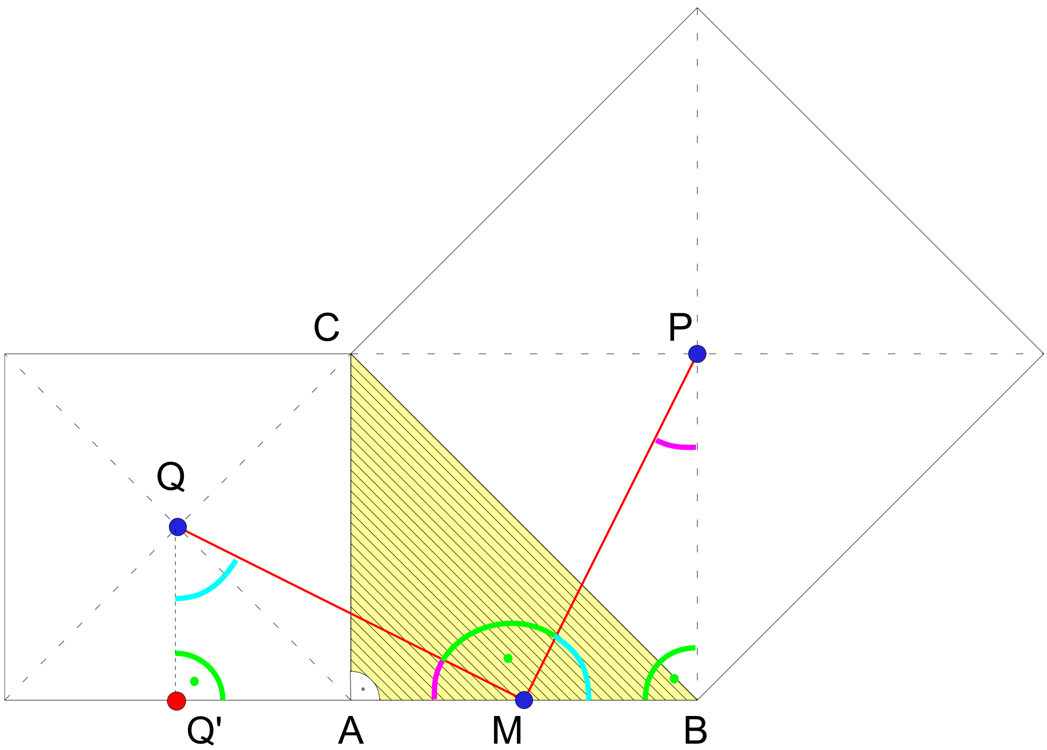
Lösungsvorschlag Aufgabe 1, Beweisen ist klasse! (Teil 1)

Aufgabe 1:

Das Dreieck ABC ist gleichschenklig und rechtwinklig. P und Q sind die Schnittpunkte der Quadratdiagonalen, M ist die Mitte von AB.

Beweise, dass die Strecken $\overline{MP}$ und $\overline{MQ}$ orthogonal und gleich lang sind.



(Sehr ausführliche) Lösung:

Schritt 1:

Fälle das Lot von Q auf die Verlängerung der Strecke $\overline{AM}$. Der Lotfußpunkt sei Q'. Q' teilt die untere Quadratseite genau in der Mitte.

Schritt 2:

Für die Längengleichheit müssen wir nachweisen, dass die Dreiecke ΔMBP und $\Delta QQ'M$ kongruent sind, denn dann sind natürlich die langen (roten) Seiten dieser Dreiecke gleich lang.

Schritt 2.1:

Wir beweisen die Gleichheit der Strecken $\overline{Q'M}$ und $\overline{BP}$.

1. Da Q der Mittelpunkt des linken Quadrats ist, $\overline{QQ'}$ und auch $\overline{Q'A}$ jeweils genau eine halbe Quadratseite lang.
2. Weil das Dreieck ΔABC gleichschenklig ist und M genau in der Mitte von $\overline{AB}$ liegt, ist die Strecke $\overline{AM}$ ebenfalls eine halbe Quadratseite lang.

3. $\underset{1.;2.}{\rightarrow}$ Die Strecke $\overline{Q'M}$ ist somit genau eine Quadratseite lang – genau wie die Strecke $\overline{BP}$.

Schritt 2.2:

Die Gleichheit der Strecken $\overline{QQ'}$ und $\overline{MB}$ folgt direkt aus der Konstruktion von Q' und der Gleichschenkligkeit von ΔABC (vgl. Schritt 1 und 2.1).

Schritt 2.3:

Für die Anwendung der Kongruenzsätze benötigen wir die Gleichheit einer weiteren Dreiecksgröße. Hier bietet sich der rechte Winkel bei Q' und B an.

$\underset{2.1 \text{ bis } 2.3}{\rightarrow}$ Mit dem Kongruenzsatz sws folgt die Kongruenz der Dreiecke ΔMBP und $\Delta QQ'M$. Damit sind insbesondere die Seiten $\overline{MQ}$ und $\overline{PM}$ gleich lang.

Schritt 3:

Die beiden spitzen Winkel der kongruenten Dreiecke tauchen bei M wieder auf. Da die Summe der Innenwinkel bei Dreiecken 180° beträgt, muss der dritte Winkel oberhalb von M ein rechter Winkel sein.

Somit ist auch der zweite Teil der Aufgabe gezeigt: die beiden Strecken $\overline{MQ}$ und $\overline{PM}$ sind zueinander orthogonal.

q. e. d. (quot erat demonstrandum = was zu beweisen war)