

Einführung Trigonometrie (Teil 1)

Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck

Wiederholung Kongruenzabbildungen

„In der Geometrie sind zwei Flächen kongruent (deckungsgleich) (von lat. congruens = übereinstimmend, passend), wenn sie durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführt, d.h. zur Deckung gebracht werden können. Kongruenzabbildungen (auch Bewegungen genannt) sind Parallelverschiebung, Drehung, Spiegelung und die Verknüpfungen dieser Abbildungen. “ ... „Kongruente Figuren zeichnen sich dadurch aus, dass entsprechende Streckenlängen und Winkelgrößen übereinstimmen.“ (aus www.wikipedia.de)

Die wichtigsten Eigenschaften von Kongruenzabbildungen:

- Kongruenzabbildungen sind **streckentreu** und **winkeltreu**.

Wiederholung Ähnlichkeitsabbildungen

Die Ähnlichkeit erweitert die Kongruenz um die Möglichkeit der zentrischen Streckung.

Ähnliche Figuren sind damit in der Regel nicht deckungsgleich. Sie stimmen zwar in der Form überein, nicht aber in ihrer Größe (Ausnahme: triviale Streckung mit Streckfaktor 1).

Damit bleibt bei Ähnlichkeitsabbildungen die **Winkeltreue** erhalten – nicht aber die Streckentreue (auch Längentreue)! Immerhin bleiben die Verhältnisse entsprechender Längen gleich. Somit tritt an die Stelle der Streckentreue bei Ähnlichkeitsabbildungen die **Streckenverhältnistreue**.

Beachte:

Alle Kreise sind zueinander ähnlich. (Jeder Kreis mit Radius r lässt sich aus dem Einheitskreis durch zentrische Streckung mit dem Streckfaktor r erzeugen.)

Zwei Dreiecke sind automatisch ähnlich, wenn sie in zwei (und damit allen drei) Innenwinkeln überein stimmen.

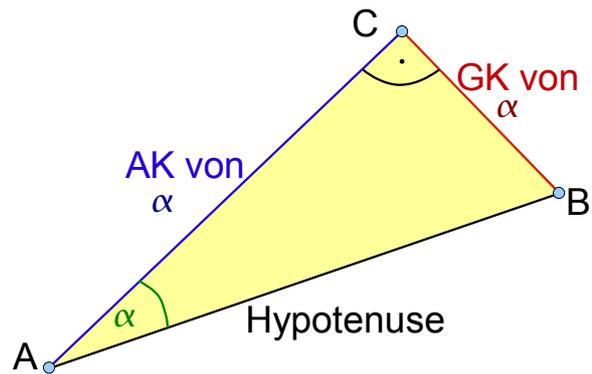
Zwei rechtwinklige Dreiecke sind ähnlich, wenn sie eine gemeinsame spitzwinklige Innenwinkelgröße besitzen.

Aufgabe: Zeichne ein rechtwinkliges 30° -Dreieck. Was fällt auf?

Antwort: Unabhängig von der Größe des Dreiecks, ist die dem 30° -Winkel gegenüber liegende Seite stets halb so lang wie die längste Seite (Hypotenuse).

Definitionen Sinus, Kosinus und Tangens

Aus den drei Seiten eines Dreiecks lassen sich genau sechs verschiedene Seitenverhältnisse bilden. Je zwei davon sind miteinander verwandt und lassen sich durch Kehrwertbildung leicht ineinander überführen. Wählt man ausgehend von einem spitzen Innenwinkel die Bezeichnungen Ankathete (AK), Gegenkathete (GK) und Hypotenuse (Hyp), so liefern die drei (interessanten) Streckenverhältnisse zu einem Winkel α zwischen 0° und 90° die Definitionen für den Sinus (sin), den Kosinus (cos) und den Tangens (tan):



$$\sin \alpha := \frac{GK}{Hyp}; \quad \cos \alpha := \frac{AK}{Hyp} \quad \text{und} \quad \tan \alpha = \frac{GK}{AK}; \quad \alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$$

„Wofür braucht man das?“:

Mit einem Winkel und einer bekannten Dreiecksseite (Hypotenuse, Ankathete oder Gegenkathete) lässt sich bereits das gesamte Dreieck rekonstruieren. Dies nutzt man beispielsweise zur Höhenbestimmung mit dem so genannten Försterdreieck, oder der Vermessung von Gelände (siehe Aufgaben im Buch).

Linktipp Vermessungsprojekt : <http://mathematik.ph-weingarten.de/~ludwig/Vorlesungen/SS2004/vermessen/SkriptVidGeoSS2004.pdf>).

Hinweis für Interessierte:

Bei beliebigen Dreiecken kann man mit diesen drei Definitionen und dem Winkelsummensatz ausgehend von den Kongruenzsätzen aus den vorgegebenen Stücken sss, wsw (bzw. sww), sws und Ssw die übrigen Dreiecksseiten und -winkel berechnen. (Evtl. muss man eine geeignete (berechenbare) Höhe zu Hilfe nehmen, mit der man das Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerteilt.

Im Falle sww (bzw. wsw) stößt man auf diese Weise auf den Sinussatz. Bei sws erhält man den Kosinussatz (→ Formelsammlung).

(Sinus- und Kosinussatz gelten auch für Winkel über 90° , was eigentlich mit unseren bisherigen Definitionen an einem rechtwinkligen Dreieck nicht möglich ist).