2016 ist eine Dreieckszahl

Nachweis in drei Schritten

Schritt 1 (Ansatz mit Formel für Dreieckszahlen):
Wir wissen, dass sich die *n*-te Dreieckszahl D_n schreiben lässt als Hälfte des Produkts aus *n* und dem Nachfolger von *n*.
Kurz: $D_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1)$.

Schritt 2 (quadratische Gleichung aufstellen):
Unsere unbekannte Variable ist *n*. Der Wert von D_n ist 2016. Damit bilden wir unsere Gleichung, die durch Ausmultiplizieren und Normieren auf den Einsatz der *p*-*q*-Formel vorbereiten:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot n \cdot (n+1) &= 2016 \\
\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n &= 2016 \quad | -2016 \\
\frac{1}{2} \cdot n^2 + \frac{1}{2} \cdot n - 2016 &= 0 \quad | \cdot 2 \text{ (Normierung)} \\
n^2 + n - 4032 &= 0 \quad \text{(reif für die } p\text{-}q\text{-Formel)}
\end{aligned}$$

Schritt 3 (Einsatz der *p*-*q*-Formel):
Die Gleichung liegt nun in der Form $x^2 + px + q = 0$ vor. Damit können wir die Lösungsformel $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ (mit $p = 1$ und $q = 4032$) ins Spiel bringen:

$$\rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{4032 \cdot 4}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{16129}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{127}{2}$$

$$\rightarrow x_1 = \frac{126}{2} = 63$$

$$\left(x_2 = -\frac{128}{2} = -64 \quad \text{keine sinnvolle Lösung}\right)$$

Antwortsatz:
2016 ist die 63.-ste Dreieckszahl.
D. h. $2016 = 1 + 2 + 3 + ... + 63$ oder $2016 = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 64$.

Lösung Zusatzfrage: Bei einer Party müssten 64 Gäste miteinander anstoßen, damit das Sektglas 2016 mal erklingt.

Begründung: Bei zwei Gästen erklingt das Glas genau einmal. Kommt ein dritter hinzu stößt er mit den beiden anwesenden Gästen je einmal an. Das macht $1+2+3 = D_2$. Dies geht so weiter bis der 64. Gast mit den vorhanden 63 Gästen je einmal anstößt – macht $1+2+3+...+63 = D_{63} = 2016$.