

Aufgabe:

Thomas rechnet die Zahlen von 1 bis 30 mit einem Rechenrick zusammen. Er bildet Pärchen und zwar addiert er die erste mit der letzten, die zweite mit der vorletzten, die dritte mit der drittletzten Zahl usw. Anschließend multipliziert er das Ergebnis eines dieser Paare mit 15. Auf welche Zahl kommt Thomas?

Führe die Rechnungen von Thomas im Heft schrittweise durch. Wo wendet er welche Rechengesetze an?

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+30 & \stackrel{\text{KG d. A.}}{=} 1+30+2+29+3+27+4+26+\dots+15+16 \\ & \stackrel{\text{AG d. A.}}{=} (1+30)+(2+29)+(3+28)+(4+27)+\dots+(15+16) \\ & = (31\cdot 1)+(31\cdot 1)+(31\cdot 1)+(31\cdot 1)+\dots+(31\cdot 1) \\ & \stackrel{\text{Distr. G.}}{=} 31\cdot(1+1+1+1+\dots+1)=31\cdot 15=465 \end{aligned}$$

Thomas sortiert im ersten Schritt die Zahlen um. Hierbei verwendet er das **Kommutativgesetz der Addition** (KG d. A.).

Im zweiten Schritt bildet er Paare. Damit setzt er Klammern, was hier aufgrund des **Assoziativgesetzes der Addition** (AG d. A.) erlaubt ist.

Im dritten Schritt berechnet er die Klammern nach den Regeln der Addition. Den Faktor 1 wird er bei diesem Schritt vermutlich weg lassen.

Schließlich verwandelt er die Plusaufgabe in eine Malaufgabe durch Anwendung des **Distributivgesetzes** (Distr. G.).

Hinweis:

Der Rechenrick von Thomas funktioniert nur bei geraden Zahlen. Bei ungeraden Zahlen bleibt der mittlere Summand übrig. Dieser muss gesondert addiert werden.

Somit erhält man bei der Summe der ersten 31 natürlichen Zahlen:

$$15\cdot 32+16=480+16=496$$

Tipp:

Addiere zur größten Zahl die 1 und dann zur nächstkleineren Zahl die nächstgrößere usw. bis Du zur Summe aus 1 und der größten Zahl gelangst. Dann gibt es auch bei ungeraden Zahlen keinen mittleren Summanden.

Allerdings berechnest Du so das Doppelte der gesuchten Summe und musst daher das Ergebnis anschließend noch halbieren. Schau Dir hierzu auf der Seite <http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/zahl/besondere-zahlen/dreieckszahlen/> den Beweis der Berechnungsformel für Dreieckszahlen (der kleine Gauß) oder das dort angebotene Lernvideo (rechte Randspalte) an.