Prozentrechnung mit quadratischen Gleichungen

Musteraufgabe „Rechtecksbestimmung“:

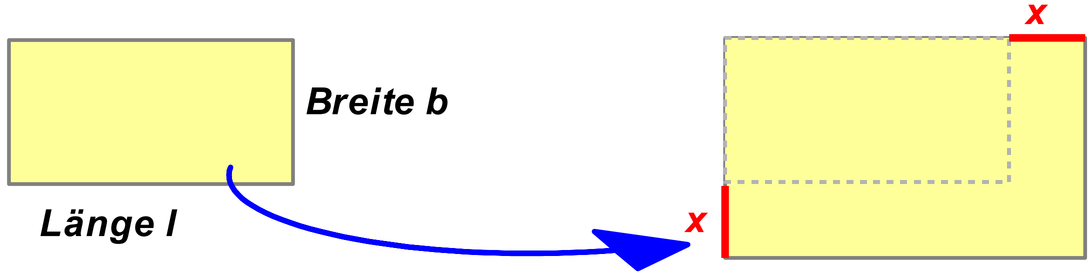
Ein Rechteck R_1 ist 20% länger als breit. Seine Seitenlängen sollen um den gleichen Betrag verlängert werden, so dass das auf diese Weise entstandene Rechteck R_2 den vierfachen Flächeninhalt des Ausgangsrechtecks R_1 besitzt.
Um wie viel Prozent von der ursprünglichen Breite muss man das Rechteck vergrößern.

Tipps zur Lösung:

1. Erstelle für die Rechtecke R_1 und R_2 jeweils eine Skizze mit den Längen, Breiten und Flächenbezeichnungen.
2. Drücke die Bezeichnungen der Skizzen mit möglichst wenigen Variablen aus. Verwende hierbei die Angaben aus der Aufgabenstellung.
3. Beachte, dass ein 20-prozentiger Zuwachs der Breite **nicht** durch den Ausdruck $b+20\%$ dargestellt wird. Prozentsätze sind **Anteile vom Grundwert,** wobei das Wort „vom“ bzw. „von“ (als Abkürzung von „Vielfaches von“) mit dem Multiplikationspunkt übersetzt wird.
   Somit muss es richtig heißen: $l = b + 20\% \cdot \boldsymbol{b} = (1+0,2)\cdot b$.
4. Erstelle eine Gleichung mit dem „Verlängerungsbetrag“ als Lösungsvariablen. Beachte, dass in der Gleichung auch die Breite des Rechtecks R_1 als Variable erscheint.
5. Bei der Lösung der Gleichung sollte man den Wert für den „Verlängerungsbetrag“ als Vielfaches der Breite erhalten. (Vgl. 3.)

Lösung:

Skizze:



$$A_1 = \underbrace{l}_{1,2\cdot b} \cdot b = 1,2b^2$$

Vierfache Fläche !

$$A_2 = (l+x)\cdot(b+x) = (1,2b+x)\cdot(b+x) = 4\cdot A_1$$

Prozentrechnung mit quadratischen Gleichungen

Gleichung aufstellen und lösen:

Aus der Information der „vierfachen Fläche“ lassen sich die beiden Flächenbeschreibungen zu einer (quadratischen) Gleichung zusammenführen:

$$\begin{array}{rcll} (1{,}2b+\mathbf{x})\cdot(b+\mathbf{x}) & = & 4\cdot 1{,}2b^2 & |\ \text{Klammern ausmultiplizieren} \\ 1{,}2b^2+1{,}2b\mathbf{x}+b\mathbf{x}+\mathbf{x}^2 & = & 4{,}8b^2 & |\ \text{Sortieren nach der Lösungsvariablen } \mathbf{x} \\ \mathbf{x}^2+2{,}2b\mathbf{x}-3{,}6b^2 & = & 0 & |\ p-q-\text{Formel mit } p=2{,}2b \text{ und } q=-3{,}6b^2 \end{array}$$

Eine grafische Lösung ist in diesem Fall aufgrund er unbekannten Breite nicht möglich.

$$\begin{array}{lrcl} p-q-\text{Formel:} & x_{1/2} & = & -1{,}1b\pm\sqrt{1{,}21b^2+3{,}6b^2} \\ & x_{1/2} & = & -1{,}1b\pm\sqrt{4{,}81}\cdot b \\ & x_{1/2} & \approx & -1{,}1b\pm 2{,}193\cdot b \\ \rightarrow & x_1 & = & 1{,}093\cdot b \ (\text{und } x_2 = -3{,}293 \text{ - unsinnige Lösung!}) \end{array}$$

Anwort:

Wenn man sowohl die Länge als auch die Breite des Rechtecks um 109,3% von der Breite vergrößert, erhält man eine Rechteck dessen Fläche vier mal so groß ist, wie die Fläche des Ausgangsrechtecks.

Probe:

Wir wählen für die Breite des Ausgangsrechtecks 10 cm – dann beträgt die zugehörige Länge 12 cm und die Fläche 120 cm².
Der Verlängerungsbetrag *x* beträgt nach unserer Rechnung 109,3 % von 10 cm, also 10,93 cm. Damit ergibt sich für das „neue“ Rechteck die Breite 20,93 cm und die Länge 22,93 cm. Dies führt zu einer Fläche von 479,92 cm². (Dieser Wert entspricht nicht exakt dem Vierfachen der Ausgangsfläche. Die Abweichung lässt sich aber mit dem gerundeten Wert für $\sqrt{4{,}81}$ begründen.)

Hinweise und Zusatzfragen:

- Aus der Aufgabenstellung geht hervor, dass der Verlängerungsbetrag ein Vielfaches der Breite sein muss. Der gleiche Ansatz mit $x\cdot b$ statt *x* führt auf direkt auf den Prozentsatz. Eine grafische Lösung ist hier möglich.
- Beachte den die Unterschied der obigen Fragestellung zu folgender Formulierung: „Um wie viel Prozent unterscheidet sich der Verlängerungsbetrag von der ursprünglichen Rechtecksbreite.“
- Wie muss die entsprechende Fragestellung lauten, wenn man die obige Gleichung nach *b* (anstatt nach *x*) auflöst? Rechne dies durch und mache die Probe.