

## Prozentrechnung mit quadratischen Gleichungen

### **Musteraufgabe „Zinssatzberechnung bei Geldanlage“:**

Die Geschwister Anna, Britta und Claus haben jeweils 20.000 € geerbt. Jeder legt sein Geld zum Beginn des Jahres 2006 bei seiner Bank an.

- a) Ende 2006 werden Anna von der Bank A die Zinsen gutgeschrieben, während sie gleichzeitig weitere 500 € auf das Sparkonto überträgt. Am 31.12. des darauf folgenden Jahres (2007) beträgt ihr angesammeltes Vermögen 22.152,00 €.  
Bestimme den Zinssatz der Bank A unter der Annahme, dass dieser sich in den beiden Jahren nicht geändert hat.
- b) Britta zahlt bei der Bank B zum Jahresende 2006 weitere 300 € ein. Ihre Bank erhöht zum gleichen Zeitpunkt den Zinssatz um 1%. Ihr Guthaben beträgt Ende 2007 genau 21.945,00 €.
- c) Claus hat seinen Erbanteil bei der Bank C angelegt. Allerdings lässt er sich exakt zur Mitte des ersten Jahres 1.000 € ausbezahlen. Mit der zweiten Zinszahlung am Ende 2007 liegen auf seinem Konto genau 20.973,75 €.

### **Vorüberlegungen zur Lösung:**

- Bei einem Zinssatz von beispielsweise 3% wächst das Kapital  $K$  nach einem Jahr auf  $K + K \cdot 3\% = K \cdot 1,03$  - also das 1,03-fache. Die Zahl 1,03 wird hierbei als **Wachstumsfaktor** bezeichnet.
- Ohne weitere Ein- oder Auszahlungen beträgt das Endkapital (mit Zinseszins) bei dreiprozentiger Verzinsung am Ende des zweiten Jahres  $(K \cdot 1,03) \cdot 1,03 = K \cdot 1,03^2$ . Hier:  $20.000\text{€} \cdot 1,03^2 = 21.218,00\text{€}$ .
- Wird zum Halbjahr Kapital ausbezahlt, kann man dies bei der Jahreszinsberechnung zunächst ignorieren. Die Korrektur erfolgt durch einen Zinsabzug für den frühzeitig ausbezahlten Geldbetrag (Aufgabenteil c)).
- Die obigen Aufgaben lassen sich unter der Annahme von einfachen Zinssätzen durch Probieren recht schnell lösen. Diese Lösungsvariante sollte uns als Mathematiker allerdings nicht zufrieden stellen. Versuche einen Ansatz mit einer Gleichung, bei der die Lösungsvariable den **Wachstumsfaktor** beschreibt. ( $\rightarrow$  Zinssatz  $p\% = x - 1$ )
- Die brauchbare Lösung muss einen Wachstumsfaktor von etwas über 1,0 liefern. Mitternachtsformel und  $p$ - $q$ -Formel erfordern einen hohen Rechenaufwand, bis die Gleichungen in die richtige Form überführt sind. Da der ungefähre Wert der Lösung bekannt ist, bietet sich hier das grafische Lösungsverfahren (mit dem GTR) an.

## Prozentrechnung mit quadratischen Gleichungen

### Lösung:

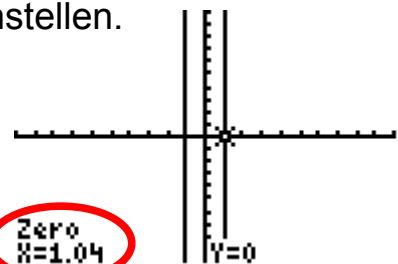
**zu a)** 
$$\underbrace{(20.000 \cdot x + 500)}_{\text{Kapital Ende 2006}} \cdot x = 22.152,00[\text{€}] \quad | -22.152$$

$$(20.000 \cdot x + 500) \cdot x - 22.152,00 = 0$$

Die linke Seite dieser (umgeformten) Gleichung ergibt im Schaubild eine (nach oben geöffnete) Parabel, die rechte Seite entspricht der x-Achse. Gesucht ist somit der x-Wert (in der Nähe von 1), bei dem die Parabel die x-Achse schneidet. Auch ohne die Umformung wäre eine grafische Lösung möglich – allerdings entspricht hier die rechte Seite einer Parallelen zur x-Achse durch den Punkt (0|22.152). In diesem Fall müsste man die y-Werte des Grafikfensters (Window) in geeigneter Weise einstellen.

```
X= Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(20000*X+500
)*X-22152
\Y2=
\Y3=
\Y4=
```

Tastenfolge für die Anzeige  
des rechten Bildes beim TI  
83 Plus:  
2<sup>nd</sup> / CALC / 2:Zero / Left  
Bound: 0 / Enter / Right  
Bound: 2 / Enter / Enter



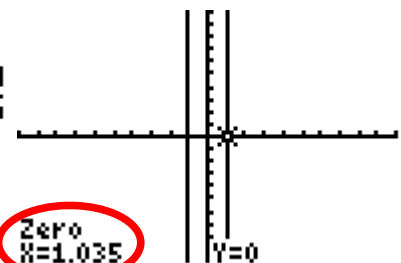
**Antwort:** Bank A gewährt 4% Zinsen.

**zu b)** 
$$\underbrace{(20.000 \cdot x + 300)}_{\text{Kapital Ende 2006}} \cdot (x + 0,01) = 21.945 \quad | -21.945$$

$$(20.000 \cdot x + 300) \cdot (x + 0,01) - 21.945 = 0$$

Angepassung des  
Wachstumsfaktor aufgrund  
der Zinserhöhung von 1%  
im Jahr 2007.

```
X= Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(20000*X+300
)*(X+0.01)-21945
```



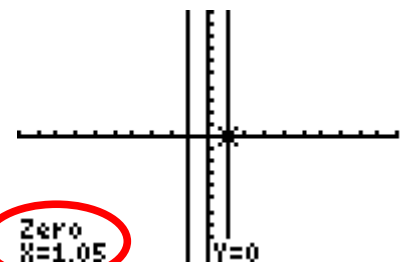
**Antwort:** Bank B vergütet für 2006 3,5% Zinsen,  
anschließend 4,5%.

**zu c)** 
$$\underbrace{\left(20.000 \cdot x - 1.000 - 1.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1)\right)}_{\text{Kapital Ende 2006}} \cdot x = 20.973,75$$

$$\left(20.000 \cdot x - 1.000 - 1.000 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-1)\right) \cdot x - 20.973,75 = 0$$

Kapitalkorrektur wegen  
Abhebung im Zinszeitraum.  
Zinskorrektur (1000 € für ein  
halbes Jahr).

```
X= Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(20000*X-1000-1000*.5*(X-1))
*X-20973.75
```



**Antwort:** Der Zinssatz bei der Bank C beträgt für die  
beiden Jahre 5%.