Lineare Gleichungssysteme

Gleichungssystem treten in der Mathematik häufig bei der Suche nach Zahlenwerten für Variablen auf. In der Schule sind meistens ***lineare Gleichungs-systeme (LGS)*** zu lösen.

„***Linear***“ bedeutet, dass die Variablen höchstens mit einem Zahlfaktor auftreten, niemals aber unter einer Wurzel oder mit einer Hochzahl (ungleich 1).

Beispiele:

1. Geradenschnittpunkt (Klasse 7):

Gesucht ist der Schnittpunkt der beiden Geraden zu den Geradengleichungen $g_1 : y = 2x - 1$ und $g_2 : y = -0{,}5x + 1$.

2. Knobelaufgabe:

Mit einem 2-Liter-Eimer muss man 12 mal mehr laufen um ein Fass zu füllen, als mit einem 2,5-Liter-Eimer. Bestimme das Fassungsvermögen des Fasses.

3. Bestimmung von Zuodnungsvorschriften (Klasse 8):

Gesucht ist die Gleichung einer quadratischen Zuordnung, deren Schaubild durch die Punkte $(-1|3), (0|4)$ und $(4|0)$ verläuft.

Lösungstechniken für LGS:

In der Regel löst man LGS mit einem der drei folgenden Verfahren.

Jedes Verfahren dient dem Ziel, schrittweise die Zahl der Variablen um eins zu verringern, bis am Ende nur noch eine Variable übrig bleibt.

1. ***Gleichsetzungsverfahren***
   Beim Gleichsetzungsverfahren formt man die Gleichungen so um, dass jeweils auf einer Seite der Gleichung der gleiche Ausdruck steht. Nun setzt man die anderen Seiten gleich. Achte darauf, dass dabei wirklich eine Variable verschwindet, sonst hast du nichts gewonnen.
2. ***Additionsverfahren***
   Hier wird das Vielfache einer Gleichung zum Vielfachen einer anderen Gleichung addiert, so dass eine Variable in der Summe nicht mehr auftritt.
3. ***Einsetzungsverfahren***
   Beim Einsetzungsverfahren wird eine Gleichung nach einer Variablen aufgelöst. Der Term für diese Variable wird anschließend in die andere(n) Gleichung(en) eingesetzt.

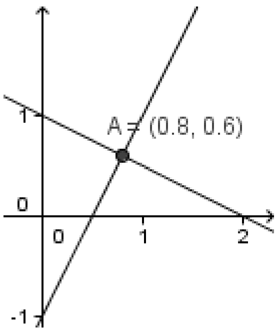
Lösungen der Beispielaufgaben:

Bsp. 1:

Hier bietet sich das Gleichsetzungsverfahren an, da sich die linken Seiten der Gleichungen bereits entsprechen.

$$Gl.1 = Gl.2 \quad \rightarrow \quad 2x - 1 = -0{,}5x + 1$$

Diese Gleichung kann vollständig aufgelöst werden: $\rightarrow x = \frac{4}{5}$. Mit diesem Wert berechnet man durch Einsetzten in eine der beiden ersten Gleichungen den zugehörigen y-Wert:



$$\rightarrow \quad \text{Mit } Gl.2: \; y = -\frac{1}{2} \cdot \mathbf{\frac{4}{5}} + 1 \quad \rightarrow \quad y = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Antwortsatz: Der Schnittpunkt der Geraden liegt bei $(0{,}8|0{,}6)$.

Bsp. 2:

Mit der Variablen x für die Zahl der Läufe mit dem 2,5-Liter-Eimer und y für das Fassungsvermögen ergeben sich folgende Gleichungen:

$$\begin{matrix} Gl.1: & 2(x+12) & = & y \\ Gl.2: & 2{,}5x & = & y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} Gl.1: & 2x+24 & = & y \\ Gl.2: & 2{,}5x & = & y \end{matrix}$$

Wir multiplizieren die erste Gleichung mit -1 und addieren das Ergebnis zur zweiten Gleichung. (Auch eine Subtraktion der beiden Gleichungen wäre denkbar, allerdings unterlaufen bei der Addition erfahrungsgemäß deutlich weniger Fehler.)

$$\begin{array}{lccc} (Gl.1)\cdot(-1): & -2x-24 & = & -y \\ +Gl.2: & 2{,}5x & = & y \\ \hline \end{array}$$

$$\textbf{Ergebnis}: \quad 0{,}5x - 24 \; = \; 0 \rightarrow x = 48 \quad \rightarrow \quad (\text{mit } Gl.2) \;\; y = \frac{5}{2} \cdot 48 = 120\,[Liter]$$

Antwortsatz: In das Fass kann 120 Liter aufnehmen.

Bsp. 3:

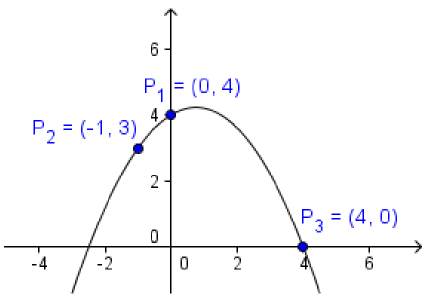
Allgemeine Form einer quadratischen Zuordnung: $y = a x^2 + b x + c$.

Die drei Punkte liefern drei Bestimmungsgleichungen für die drei unbekannten Parameter a, b und c. ***Hierbei beginnen wir mit dem Punkt auf der y-Achse, da dieser bereits den Wert für c (y-Achsenabschnitt) liefert.***

$$\begin{array}{lcclcl} (0|4) \rightarrow Gl.1: & 4 & = & a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c & \rightarrow & \mathbf{c = 4} \\ (-1|3) \rightarrow Gl.2: & 3 & = & a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + 4 & \rightarrow & \mathbf{b = a + 1} \\ (4|0) \rightarrow Gl.3: & 0 & = & a \cdot (4)^2 + b \cdot (4) + 4 & & \end{array}$$

Wir vereinfachen die Gleichung 3 durch Multiplikation mit $\frac{1}{4}$ und setzen den Ausdruck für b ein:

$$\begin{array}{lll} \frac{1}{4} \cdot Gl.3: & 0 = & 4a + b + 1 \\ \rightarrow & 0 = & 4a + (a+1) + 1 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{a = -\frac{2}{5}} \end{array}$$



Diesen Wert für a setzten wir in Gleichung 2 ein:

$$\rightarrow \quad 3 \; = \; -\frac{2}{5} - b + 4 \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{b = \frac{3}{5}}$$

Antwortsatz: Die quadratische Zuordnung lautet $\boldsymbol{y = -\frac{2}{5} x^2 + \frac{3}{5} x + 4}$.