

Modellierung mit linearen Gleichungssystemen

Aufgabe:

Ein Becken wird durch drei Pumpen befüllt. Pumpe 1 und Pumpe 2 benötigen für die Füllung zusammen 45 Minuten. Die dritte Pumpe füllt das Becken zusammen mit der ersten Pumpe in einer Stunde und 30 Minuten. Die dritte Pumpe arbeitet nur halb so schnell wie die zweite.

Wie lange benötigt jede Pumpe alleine für die Füllung des Beckens? Wie viel Zeit vergeht, wenn man das Becken gleichzeitig mit allen drei Pumpen befüllt?



Quelle: www.pixelio.de

Formulierungen in der „realen Welt“:

1. Pumpe 1 und Pumpe 2 benötigen für die Füllung zusammen 45 Minuten.
2. Die dritte Pumpe benötigt zusammen mit der ersten eine Stunde und 30 Minuten.
3. Die dritte Pumpe arbeitet nur halb so schnell wie die zweite.

Transformation in die Welt der Mathematik:

(erster) Ansatz:

x_1 : Füllmenge in Liter pro Stunde bei Pumpe 1. Analog x_2 und x_3 .

→ $x_1 \cdot 0,75$: Füllmenge nach 45 Minuten aus Pumpe 1.

→ $x_1 \cdot 0,75 + x_2 \cdot 0,75$: Wassermenge nach 45 Min. aus Pumpe 1 und 2.

Das kann nicht sein, denn wir wissen nicht wie viel Liter im Becken sind.

Ausweg:

Das Becken wird zu 100% befüllt. Daher beschreiben wir die **prozentuale** Beckenfüllung pro Stunde mit den Variablen x_1, x_2 und x_3 .

Lösung in der abstrakten „Welt der Mathematik“:

Es ergibt sich das folgende lineare Gleichungssystem (Beachte: 100%=1):

$$\text{CAS: } \begin{cases} 0,75x + 0,75y = 1 \\ 1,5x + 1,5z = 1 \\ 2z = y \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(entspricht 1. aus der „realen Welt“)} \\ \text{(Gleichung für 2.)} \\ \text{(Gleichung für 3.)} \end{array}$$

$$\left\{ x=0, y=\frac{4}{3}, z=\frac{2}{3} \right\}$$

Rücktransformation in die „reale Welt“:

- Pumpe 1 ist wohl Schrott. Sie trägt zur Beckenfüllung nichts bei.
- Pumpe 2 füllt in einer Stunde $\frac{4}{3}$ des Beckens. Damit benötigt sie eine dreiviertel Stunde für das ganze Becken (siehe NR.).
- In gleicher Weise erhält man aus $x_3 = \frac{2}{3}$, dass man nur mit Pumpe 3 das Becken in eineinhalb Stunden füllen kann.
- Aus $x_1 + x_2 + x_3 = 0 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$ folgt analog, dass alle drei (bzw. die zwei intakten) Pumpen das Becken in einer Stunde zweimal füllen könnten. Gemeinsam erfolgt somit die Beckenfüllung in einer halben Stunde.

NR:	
Zeit	Füllstand
1 h	$\frac{4}{3}$
$\frac{3}{4}$ h	100 %

$\cdot \frac{3}{4}$