Geometrische Interpretation von quadratischen Gleichungen

Lösungen der Übungsaufgaben

Aufgaben:

1. Wie muss man bei der Gleichung $x^2 = x + a$ den konstanten Ausdruck (= Wert für a) wählen, damit die entsprechende Gerade die Normalparabel nur berührt?
2. Die Gerade $y = m(x-3)-2$ verläuft durch den Punkt $P(3|-2)$. Wie muss man die zugehörige Steigung wählen, so dass die Gerade die Normalparabel berührt?

Lösungstipps:

zu 1.:

- Stellen die Gleichung in die (aufgeräumte) ***Normalform*** um.
- Mit Hilfe der ***p-q-Formel*** (bzw. ***Mitternachtsformel***) lässt sich leicht eine Lösung finden. Hierfür musst wissen, dass die quadratische Gleichung in diesem Fall nur genau eine Lösung besitzen darf.

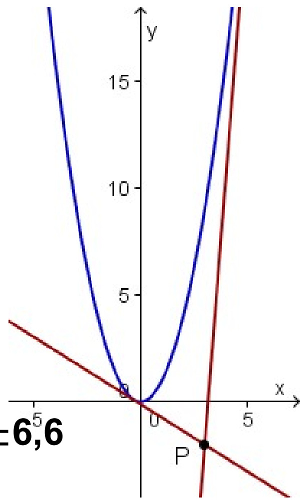
zu 2.:

- Fertige zunächst eine Skizze an. Es gibt einen bedeutenden Unterschied zur Aufgabe 1. Welchen?
- Stelle (wie bei 1.) eine quadratische Gleichung mit dem Parameter *m* auf. Nutze das Wissen von Aufgabe 1.
- Der Unterschied zu 1. zeigt sich auch mathematisch. Wie?

Lösung Aufgabe 1:

$x^2 - x - a = 0 \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + a}$ → Die Diskriminante wird genau dann 0, wenn $a = -\frac{1}{4}$ ist. Damit hat die Gleichung $x^2 = x - \frac{1}{4}$ genau eine Lsg.

Lösung Aufgabe 2



Im Unterschied zu Aufgabe 1 gibt es hier zwei Berührgeraden.

$x^2 = m \cdot (x-3) - 2 \;\rightarrow\; x^2 - mx + 3m + 2 = 0 \;\rightarrow$ *p*-*q*-Formel mit $p = -m$ und $q = 3m + 2 \;\rightarrow\; x_{1/2} = \frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - 3m - 2}$

→ Nullsetzen der Diskriminante liefert ***zwei*** Steigungen, bei denen die ursprüngliche quadratische Gleichung genau eine Lösung besitzt:

$\frac{m^2}{4} - 3m - 2 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 12m - 8 = 0 \rightarrow m_{1/2} = 6 \pm \sqrt{36+6} \rightarrow$ $\boldsymbol{m_{1/2} \approx 6 \pm 6{,}6}$

Hinweise:

1. Wenn *P* im Innern der Parabel liegt gibt es keine Lösungen beim Nullsetzen der Diskriminante. Liegt *P* auf der Parabel, gibt es genau eine Lösung.
2. Mit Hilfe der Ableitungsfunktion lässt sich eine Alternativlösung finden (vgl. Arbeitsblatt „Tangentenprobleme in der Sek. II“ http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek2/analysis/diff).