

Geometrische Interpretation von quadratischen Gleichungen

Jede quadratische Gleichung lässt sich leicht so umformen, dass auf der einen Seite vom Gleichzeichen ein quadratischer Ausdruck steht und auf der anderen Seite ein linearer.

Die quadratische Seite dieser Gleichung beschreibt als Funktionsterm betrachtet eine Parabel, die andere Seite hingegen eine Gerade.

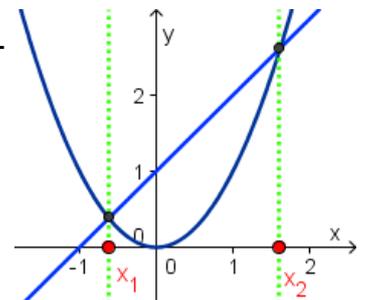
Beispielaufgabe:

Wie viele Lösungen besitzt die Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$?

Lösung: Durch Umformen erhalten wir $x^2 = x + 1$

Die linke Seite dieser Gleichung beschreibt eine Normalparabel, die rechte Seite hingegen eine Gerade mit der Steigung 1 und dem y-Achsenabschnitt 1. Sie schneidet offensichtlich die Normalparabel in genau zwei Punkten. Damit besitzt die Gleichung genau zwei Lösungen.

Hinweis: Wäre der y-Achsenabschnitt -2 gäbe es hingegen keinen Schnittpunkt. Demnach hätte die quadratische Gleichung $x^2 - x + 2 = 0$ auch keine Lösung.



Aufgaben:

1. Wie muss man bei der Gleichung $x^2 = x + a$ den konstanten Ausdruck (= Wert für a) wählen, damit die entsprechende Gerade die Normalparabel nur berührt?
2. Die Gerade $y = m(x - 3) - 2$ verläuft durch den Punkt $P(3 | -2)$. Wie muss man die zugehörige Steigung wählen, so dass die Gerade die Normalparabel berührt? (Skizze machen!)

Lösungstipps:

zu 1.:

- Stelle die Gleichung in die (aufgeräumte) **Normalform** um.
- Mit Hilfe der **p-q-Formel** (bzw. **Mitternachtsformel**) lässt sich leicht eine Lösung finden. Hierfür musst du wissen, dass die quadratische Gleichung in diesem Fall nur genau eine Lösung besitzen darf.

zu 2.:

- Fertige zunächst eine Skizze an. Es gibt einen bedeutenden Unterschied zur Aufgabe 1. Welchen?
- Stelle (wie bei 1.) eine quadratische Gleichung mit dem Parameter m auf. Nutze das Wissen von Aufgabe 1.
- Der Unterschied zu 1. zeigt sich auch mathematisch. Wie?