

Quadratische Ergänzung

Quadratische Ergänzung ist ein elegantes Verfahren, um eine allgemeine quadratische Gleichung so umzuformen, dass auf einer Seite eine Zahl und auf der anderen Seite ein Binom steht.

Kurz:

Quadratische Ergänzung

allgemeine Form $ax^2+bx+c=0 \rightarrow$ Form mit Binom $(x \pm d)^2=e$

Somit liefert „Wurzel ziehen“ sofort die Lösung(en) – falls sie existieren.

Beachte: Wenn der lineare Ausdruck bei einer quadratischen Gleichung fehlt, kann man direkt die Wurzel ziehen (\rightarrow Reinquadratische Gleichungen).

Aufgaben:

1. Stelle die folgenden Binome als Summe dar:

$$(x+3)^2; (x+0,5)^2; (1-x)^2; \left(x-\frac{1}{2}\right)^2; \left(x-\frac{3}{4}\right)^2; (x+d)^2; (x-d)^2; (d-x)^2$$

2. Wie ändert sich das Ergebnis, wenn du die Reihenfolge der Summanden in der Klammer vertauschst?
3. Fasse die folgenden Terme zusammen und sortiere das Ergebnis absteigend nach x -Potenzen. Unterstreiche dabei gleichartige Summanden.

a) $3x^2 - 5x + 3 - 4x^2 + 4 + x + 2x^2$

b) $5 - 3x - 0,5 + 6x^2 + \frac{3}{4}x - 2x^2$

4. Im Gegensatz zu Termen, darf man Gleichungen mit beliebigen Zahlen ungleich null multiplizieren.

Multipliziere die folgenden Gleichungen geschickt, so dass der Koeffizient (Vorfaktor) vor dem quadratischen Ausdruck 1 wird.

Tipps: „Schiebe“ zunächst Alles auf eine Seite der Gleichung, so dass die andere null wird.

Vermeide möglichst Minuszeichen vor dem quadratischen Ausdruck.

a) $-4x^2 + 5x + 17 = 3x^2 - 4 - 2x$

b) $-2x^2 - (x-1)^2 = 8x - 2$

5. Welche Zahl muss man zu den folgenden Termen addieren, um ein Binom zu erhalten? Addiere „null“ indem du die gesuchte Zahl mit Farbe addierst und wieder subtrahierst.

a) $x^2 - 4x$

c) $x^2 - 5x$

b) $x^2 + x$

d) $x^2 + \frac{1}{2}x$

Von der allgemeinen quadratischen Gleichung zur (praktischen) Form mit einem Binom:

Verfahren der quadratischen Ergänzung:

Schritt 1: Nachdem die Gleichung in der allgemeinen Form vorliegt, multipliziere mit dem Kehrwert des Vorfaktors des quadratischen Ausdrucks.

→ Die Gleichung liegt anschließend in der gemischtquadratischen (oder normierten) Form vor.

Schritt 2: Schiebe die Zahl „ohne x“ auf die andere Seite der Gleichung.

Schritt 3: Betrachte die Hälfte des Zahlfaktors vor dem linearen Ausdruck ("das mit x"). Addiere auf beiden Seiten der Gleichung das Quadrat dieser Zahl (mit Farbe!).

Schritt 4: Wandle die eine Seite der Gleichung in ein Binom um und fasse auf der anderen Seite die Zahlausdrücke zusammen.

Fertig! Jetzt kannst Du die quadratische Gleichung durch „Wurzel ziehen“ lösen.

Beachte, dass es beim Wurzel ziehen drei Möglichkeiten gibt:

1. Es gibt eine positive und eine negative Wurzel (wenn der Zahlausdruck positiv ist).
2. Es gibt genau eine Wurzel, und die ist null (wenn der Zahlausdruck 0 ergibt).
3. Es gibt keine Wurzel, (wenn der Zahlausdruck negativ ist).

Kleine Knochelei (am Rande):

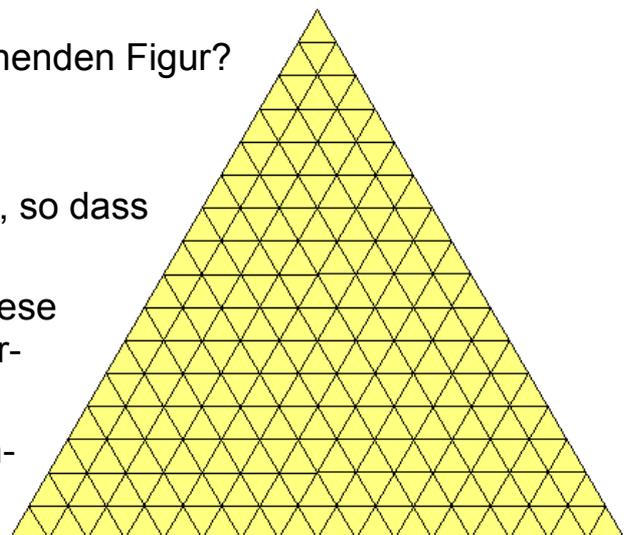
Wie viele Dreiecke liegen in der nebenstehenden Figur?

Tipps:

Vereinfache zunächst die Problemstellung, so dass du die Lösungen abzählen kannst.

Suche nach Regelmäßigkeiten. Bleiben diese erhalten, wenn du die Zahl der Seitenunterteilungen vergrößerst.

Verallgemeinere das Problem auf n Seitenunterteilungen. Stelle für die Gesamtzahl der Dreiecke einen Term auf.



Beachte, dass es verschieden große Dreiecke gibt.

Fallen dir weitere Fragestellungen zu dieser Skizze ein?